Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 20 Les fonctions suivantes, est-ce qu'elles sont injectives ? Surjectives ?

$$f(x) = \frac{4}{3\pi}x + \frac{1}{2}\sin(x), \qquad g(x) = \frac{4}{3\pi}x + \frac{1}{3}\sin(x).$$

Exercice 21 On rappelle qu'on dit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si, pour tout x on a $f(x) = f(-x)$, et qu'on dit qu'elle est *impaire* si pour tout réel x on a $f(-x) = -f(x)$. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est une fonction impaire, et vice versa.

Exercice 22 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en spécifiant pour chaque fonction son domaine de définition) :

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x-2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2}, \quad f_3(x) = \sqrt{2x^2-4x+1}$$

$$f_4(x) = (2-x^2)^7\sqrt{2+x^2}, \quad f_5x = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_6(x) = (x^3-3x^2+6x)e^x$$

Solutions des exercices 14 – 19

Exercice 14 Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe, c.à.d., il existe au moins un nombre $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. (Indication : on peut commencer par définir une fonction $g(x) := f(x) - x$.)
Solution : On considère la fonction $g(x) := f(x) - x$. On a $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. Par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe un nombre $x \in [0,1]$, tel que $g(0) = 0$, c.à.d., $f(x) = x$.

Exercice 15 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
Solution (esquisse) : Nous allons noter $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Comme $f(-x) = -f(x)$, il suffit de démontrer que f donne une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[0,1]$. Remarquons d'abord que pour $x > 0$, la fonction s'exprime plus facilement $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

Montrons d'abord que f est strictement croissante. Pour $x, y \geqslant 0$ l'inégalité $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ est équivalente à $x(1+y) < y(1+x)$, ce qui est, à son tour, équivalent à $x + xy < y + xy$ ou $x < y$. On voit donc qui f est strictement croissante. On en déduit que $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective, ce qui implique que $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathit{image}(f)$ est bijective. Il reste le problème d'identifier l'image de $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

En tant que fraction de fonctions continues, de dénominateur différent de zero, f est continue. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires on peut déduire que l'image $f([0,+\infty[)$ est un intervalle. D'abord, $f(x) \geqslant f(0) = 0$ pour tout x, parce que f est croissante. Ensuite, $|f(x)| < 1$ pour tout x, parce que $|x| < |1+x|$. Par contre, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. En total, on obtient que $f([0,+\infty[) = [0,1[$.

Exercice 16 Montrer que l'équation $x^2 \cdot (\cos x)^2 + x \cdot \sin x + 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. (Pour les plus ambitieux : montrer qu'elle en a une infinité.)
Solution : Soit $f(x) = x^2 \cdot (\cos x)^2 + x \cdot \sin x + 1$. On calcule $f(0) = 0+0+1 = 1$, et $f(\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{2})^2 \cdot 0^2 + \frac{3\pi}{2} \cdot (-1) + 1 = 1 - \frac{3\pi}{2} < 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un $x \in]0, \frac{3\pi}{2}[$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 17 Donner les fonctions réciproques des fonctions suivantes. En chaque cas, préciser le domaine de définition de f_i et f_i^{-1}.

(a) $f_1(x) = 1-2x$. **Soln.:** f_1 est défini sur $\mathbb{R}$, et l'image est $\mathbb{R}$. La fonction f_1^{-1} est défini sur l'image de f_1, donc sur $\mathbb{R}$ aussi. Comme $y = 1-2x$ est équivalent à $x = \frac{1-y}{2}$, la fonction réciproque est $f_1^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$.
(b) $f_2(x) = \frac{1}{2x}$. **Soln.:** f_2 est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et son image est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On en déduit que f_2 est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donné par la formule $f_2^{-1}(y) = \frac{1}{2y}$.
(c) $f_3(x) = x+1$. **Soln.:** $f_3^{-1}(y) = y-1$, défini sur $\mathbb{R}$.
(d) $f_4(x) = \sqrt{x-1}$. **Soln.:** La fonction f_4 est définie pour $x \geqslant 1$, et son image est l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Sa fonction réciproque (si elle existe) doit donc être définie sur $\mathbb{R}_+$, et d'image $[1,+\infty[$. L'équation $y = \sqrt{x-1}$ est équivalente à $x = \pm y^2 + 1$. Or, pour $y \geqslant 1$, il y a exactement une des deux valeurs possibles de x qui satisfait $x > 1$, à savoir $x = y^2 + 1$. On a donc $f_4^{-1}(y) = y^2 + 1$ comme fonction réciproque de f_4.

Exercice 18 Soit f un polynôme de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_n > 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si n est pair et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si n est impair.
Solution : On a $f(x) = x^n \cdot (a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$. Regardons d'abord le facteur $g(x) := (a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n})$. On observe que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = a_n$. Donc il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout nombre réel x avec $x > M$ on a $g(x) > \frac{a_n}{2} > 0$. Maintenant on remarque qu'on sait déjà que $x^n \cdot \frac{a_n}{2}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Comme pour $x > M$ on a vu que $f(x) > x^n \cdot \frac{a_n}{2}$, on peut conclure par le théorème des gendarmes que $f(x)$, aussi, tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Pour montrer le résultat quand x tend vers $-\infty$, on observe que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = a_n$, également. On en déduit l'existence d'un nombre $m < 0$ tel que pour tout nombre $x \in]-\infty, m[$ on a $g(x) > \frac{a_n}{2} > 0$. Or, on sait déjà que $\lim_{x\to-\infty} x^n = (-1)^n \infty$. De nouveau, on peut conclure par le théorème des gendarmes.

Exercice 19 Donner un exemple d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est bijective mais ne pas monotone.

Solution : Attention, un tel exemple ne peut pas être continu ! Voici un exemple : $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Pour voir que cette application est bijective, il suffit de remarquer qu'elle est sa propre fonction réciproque : $f(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f n'est pas croissante car $1 < 2$ et $f(1) > f(2)$. La fonction f n'est pas décroissante non plus, parce que $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.