Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 11 Dans cet exercice on va étudier des suites définies de façon récursive en spécifiant u_0, u_1, et la formule récursive $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où a et b sont deux nombres réels.

(a) Soient x_1, x_2 des solutions de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Soient r, s deux nombres réels arbitraires. Montrer que la suite $u_n := rx_1^n + sx_2^n$ satisfait, pour tout entier n, l'équation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

(b) On va regarder de plus près l'exemple la suite de Fibonacci : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (donc $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$ etc.). Trouver les valeurs x_1, x_2 comme dans (a). Ensuite, trouver des valeurs pour r, s pour qu'en plus on aie $u_0 = r + s = 1$ et $u_1 = rx_1 + sx_2 = 1$.

(c) En (b) on a trouvé la formule suivante pour la suite de Fibonacci :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}).$$

En déduire que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. (Ceci est une propriété célèbre de la suite de Fibonacci : les quotients des termes succesifs tend vers le "nombre d'or".

Exercice 12 Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x} - x)$, puis $\lim_{x\to+\infty} \exp(\sqrt{x} - x)$
(b) $\lim_{x\to+\infty}(2\ln(x + 1) - \ln(x^2 + 1))$
(c) La limite de $\exp(\frac{1}{x})$ à gauche et à droite en 0 ; c.à.d., la limite $\lim_{x\to0} f(x)$ et $\lim_{x\to0} g(x)$, où $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\frac{1}{x})$ et $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(\frac{1}{x})$.
(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$ **(e)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{E(2x)}{E(x)}$ **(f)** $\lim_{x\to0} \frac{x}{a}E(\frac{b}{x})$ (où $a, b \in \mathbb{R}_+$)

Exercice 13 Soit a un nombre réel strictement positif, et soit $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}$.

(a) Montrer que la fonction f est décroissante.

(b) Montrer que la fonction f est bornée.

(c) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(d) Calculer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

(Indication : on pourra au début vérifier la relation $(\sqrt{x^2 + a^2}-\sqrt{x^2 - a^2})(\sqrt{x^2 + a^2}+\sqrt{x^2 - a^2}) = 2a^2$.)

Exercice 14 Soit $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe, c.à.d. qu'il existe au moins un nombre $x \in [0, 1]$

tel que $f(x) = x$. (Indication : on peut commencer par définir une fonction $g(x) := f(x) - x$.)

Exercice 15 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 16 Montrer que l'équation $x^2 \cdot (\cos x)^2 + x \cdot \sin x + 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. (Pour les plus ambitieux : montrer qu'elle en a une infinité.)

Solutions des exercices 7 – 10

Exercice 7 Calculer la limite (si elle existe) de la suite (u_n).

(a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $u_n = \frac{an+b}{n+1} = \frac{a+\frac{b}{n}}{1+\frac{1}{n}}$, et par un théorème du cours on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\lim a+\frac{b}{n}}{\lim 1+\frac{1}{n}} = a$.
(b) $u_n = \frac{3n^2-6}{(-2)^n}$. Cette suite est de la forme $P(n) \cdot (\frac{-1}{2})^n$, où $P(n)$ est un polynôme. Par un résultat du cours, on a $\lim u_n = 0$.
(c) $u_n = \frac{3n^2-6}{n^2(1+2\cdot(-1)^n)} = \frac{3-\frac{6}{n^2}}{1+2\cdot(-1)^n}$. Cette suite n'est pas convergente. Voici une démonstration. Concernant le numérateur de cette fraction, on a pour $n \geqslant 2$ que $3 - \frac{6}{n^2} > 1$. Concernant le dénominateur, nous observons que sa valeur absolue est borné par 3, et il est positif pour n pair, et négatif pour n impair. En somme, on a pour $n \geqslant 2$

$$u_n > \frac{1}{3} \text{ pour } n \text{ pair, et } u_n < \frac{-1}{3} \text{ pour } n \text{ impair.}$$

En particulier, $|u_n - u_{n+1}| \geqslant \frac{2}{3}$. Or, si u_n était convergente, alors on aurait un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\ell - u_{n+1}| < \frac{1}{3}$ pour tout $n \geqslant N$, et en particulier $|u_n - u_{n+1}| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell - u_{n+1}| < \frac{2}{3}$. Donc la suite u_n n'est pas convergente.
(d) Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n = \frac{2^n+3^n}{a^n} = (\frac{2}{a})^n + (\frac{3}{a})^n$. Si $a \in]0, 3[$, alors $\frac{3}{a} > 1$, donc la suite $(\frac{3}{a})^n$ tend vers $+\infty$. De plus, $u_n > (\frac{3}{a})^n$, et par un théorème du cours (version du théorème des gendarmes), on en déduit que $\lim(u_n) = +\infty$, aussi. Si, en revanche, $a > 3$, alors $|\frac{2}{a}| < 1$ et $|\frac{3}{a}| < 1$, en on trouve donc que $\lim u_n = 0$. Finalement, dans le cas $a = 3$, on a $|\frac{2}{a}| < 1$ (ce qui implique $\lim(\frac{2}{a})^n = 0$) et $(\frac{3}{a})^n = 1$ pour tout n ; donc $\lim u_n = 1$.
(e) Si $u_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4^n\cdot n!}$, on trouve $u_{n+1}/u_n = \frac{2n+1}{4(n+1)} = \frac{1+\frac{1}{2n}}{2+\frac{2}{n}}$. Comme le numérateur de cette dernière fraction est toujours inférieur ou égal à $\frac{3}{2}$, et le dénominateur est supérieur ou égal à 2, on obtient $|u_{n+1}/u_n| < \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$. Par un résultat du cours, on en déduit que $u_n \longrightarrow 0$.

Exercice 8 Dans cet exercice on va calculer la limite

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+u_0}}}.$$

On considère la suite définie de façon récurrente : $u_0 > -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \sqrt{1+x}$.

(a) Déterminer pour quelles valeurs de x (avec $x > -1$) on a $f(x) > x$ et pour quelles valeurs on a $f(x) < x$. **Solution :** Par des méthodes discutés précédemment, on trouve que $f(x) > x$ pour $x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $f(x) < x$ pour $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Montrer que si $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $f(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (et, de façon semblable, si x est inférieur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $f(x)$ l'est, aussi. **Solution :** Comme $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont toujours positives, l'inéquation $f(x) = \sqrt{1+x} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est équivalente a $1 + x > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ – autrement dit, à $x > (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 1$. Or, un calcul montre que $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) Démontrer que, pour toute valeur $u_0 > -1$, la suite u_n converge, et calculer sa limite. **Solution :** On distingue deux cas. D'abord, si $u_0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors on vient de voir que la suite est croissante, mais que tous ses termes sont inférieurs à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par un résultat du cours, la suite est alors convergente. De façon semblable, si $u_0 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors la suite est décroissante et minorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et donc convergente. Pour calculer la limite, on se souvient (cours) que la limite ℓ doit être une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ (c.à.d., doit être un point fixe de f). Or, le seul nombre réel $\ell > -1$ tel que $\sqrt{1+\ell} = \ell$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donc la suite u_n converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9 Dans cet exercice on va montrer que, si u_n est une suite avec $u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors on a aussi

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(La moyenne des n premiers termes d'une suite s'appelle la *moyenne de Césaro.*)
Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| < M$ pour tout n. Soit N un entier tel que $|u_n| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout entier n avec $n \geqslant N$. Pour $n \geqslant \frac{2NM}{\epsilon}$ on a alors

$$\begin{aligned}
|\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}| &\leqslant |\frac{u_1 + \ldots + u_N}{n}| + |\frac{u_{N+1} + \ldots + u_n}{n}| \\
&\leqslant \frac{N \cdot M}{n} + \frac{(n-N)\cdot \epsilon/2}{n} \\
&\leqslant \frac{N \cdot M}{n} + \frac{n \cdot \epsilon}{2n} \leqslant \frac{N \cdot M}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

Exercice 10 (Cet exercice était sur l'examen terminal en Dec 2004.) Soit (u_n)

la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Exprimer le terme général de (v_n) en fonction de n. **Solution :** On a

$$v_{n+1} = (\frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}v_n.$$

Comme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$, on obtient donc $v_n = (\frac{1}{2})^n$.

(b) A partir de la question précédente, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que le terme général de (u_n) s'Écrit

$$u_n = 3 - (\frac{1}{2})^{n-1}. \qquad (*)$$

Solution : À partir de la question (a) on obtient immédiatement $u_{n+1} = u_n + (\frac{1}{2})^n$. Vérifions ensuite, par récurrence, la formule $(*)$. La formule est correcte pour $n = 0$, car $3 - (\frac{1}{2})^{-1} = 3 - 2 = 1 = u_0$. Supposons maintenant que $(*)$ est vraie pour $n = 1, \ldots, N$. On a

$$u_{N+1} = u_N + (\frac{1}{2})^N = 3 - (\frac{1}{2})^{N-1} + (\frac{1}{2})^N = 3 - (\frac{1}{2})^{N-1}(1 - \frac{1}{2}) = 3 - (\frac{1}{2})^N,$$

ce qui conclut la récurrence. (Il y a d'autres démonstrations possibles.)

(c) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?
Solution : Il est un résultat du cours que la limite $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n$ existe et vaut 0 (il s'agit d'une suite géométrique). On a donc $\lim u_n = 3$.

(d) Donner une expression du plus petit entier n_0 tel que

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \; |u_n - 3| \leqslant 10^{-5}.$$

Solution : On cherche donc un n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $(\frac{1}{2})^{n-1} \leqslant 10^{-5}$. Cette dernière condition est équivalente à $2^{n-1} \geqslant 10^5$, ou encore à $n \geqslant \log_2(10^5) + 1$. Donc pour $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \geqslant \log_2(10^5) + 1$ l'inégalité est satisfaite. (Cette réponse est suffisante – surtout vu que pendant les examens, les calculatrices sont interdites. Avec une calculatrice on trouve $n_0 = 18$.)