Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 7 Calculer la limite (si elle existe) de la suite (u_n), où u_n est égal à

(a) $\frac{an+b}{n+1}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) **(b)** $\frac{3n^2-6}{(-2)^n}$ **(c)** $\frac{3n^2-6}{n^2(1+2\cdot(-1)^n)}$ **(d)** $\frac{2^n+3^n}{a^n}$ $(a \in \mathbb{R}_+)$
(e) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4^n\cdot n!}$ (Indication : calculer u_{n+1}/u_n.)

Exercice 8 Dans cette exercice on va calculer la limite

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+u_0}}}.$$

On considère la suite définie de façon récurrente : $u_0 > -1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \sqrt{1+x}$.

(a) Déterminer pour quelles valeurs de x (avec $x > -1$) on a $f(x) > x$ et pour quelles valeurs on a $f(x) < x$.

(b) Montrer que si $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alors $f(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (et, de façon semblable, si x est inférieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $f(x)$ l'est, aussi.

(c) Démontrer que, pour toute valeur $u_0 > -1$, la suite u_n converge, et calculer sa limite.

Exercice 9 Dans cette exercice on va montrer que, si u_n est une suite avec $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors on a aussi

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_n| < M$ pour tout n. Soit N un entier tel que $|u_n| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout entier n avec $n \geqslant N$. Montrer que pour $n \geqslant \frac{2NM}{\epsilon}$ on a $|\frac{u_1+\ldots+u_n}{n}| < \epsilon$.

Exercice 10 Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Exprimer le terme général de (v_n) en fonction de n.

(b) A partir de la question précédente, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que le terme général de (u_n) s'écrit

$$u_n = 3 - (\frac{1}{2})^{n-1}$$

(c) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

(d) Donner une expression du plus petit entier n_0 tel que

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \; |u_n - 3| \leqslant 10^{-5}.$$

Solutions des questions 1 − 6

Exercice 1 Démontrer que pour tout couple (a, b) de nombres réels on a

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

Solution On va distinguer 2 cas : si $a \geqslant b$, alors $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a = \sup(a, b)$, donc dans ce premier cas, l'égalité est vraie. Si, par contre, on a $a < b$, alors $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b = \max(a, b)$.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble de tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels les inéquations suivantes sont satisfaites. (Attention, dans chaque cas il faut déterminer d'abord pour quels valeurs de x elles sont définies, même si ce n'est pas demandé explicitement !)

(a) $\frac{x-5}{x+2} > 0$ défini pour $x \neq 2$. Pour $x < -2$, l'inégalité est équivalente à $x - 5 < 0$, et donc $x < 5$, donc elle est satisfaite pour tout $x < -2$. En revanche, pour $x > -2$, elle est équivalente à $x - 5 > 0$, c'est-à-dire, $x > 5$. L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

(b) $\frac{x^2+2x}{x-3} > 0$. Par des méthodes semblables on trouve l'ensemble $]-2, 0[\cup]3, +\infty[$.

(c) $x^3 + 4x^2 > x + 4$. Pour commencer, on trouve une décomposition du polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$ en facteurs linéaires. En général, c'est difficile, mais dans cet exemple c'est assez facile : $P(x) = (x + 4)(x + 1)(x - 1)$. On peut déduire maintenant que $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\} =]-4, -1[\cup]1, +\infty[$.

(d) $\sqrt{x + 1} \leqslant 2 - x$ Défini pour $x \geqslant -1$. Distinguer cas $x > 2$ ou $x < 2$.... Solution: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant (5 - \sqrt{13})/2$

(e) $\sqrt{x + 1} \leqslant 1 - x$ Défini pour $x \geqslant -1$, vrai si et seulement si $x \in [-1, 0]$.

(f) $\sqrt{x + 1} \leqslant x - 1$ Défini pour $x \geqslant -1$, vrai si et seulement si $x \in [3, +\infty]$

Exercice 3 Trouver (avec le moins de travail possible) des nombres $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant |\frac{x^2+1}{x+7}| \leqslant M$ pour tout réel x avec $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Solution Cet exercice est facile car il n'y a pas de distinction de cas à faire : pour tout x compris entre 0 et 3, on a $x^2 + 1 > 0$ et $x + 7 > 0$.

Pour tout x avec $0 \leqslant x \leqslant 3$, on a $x^2 + 1 \geqslant 1$ et $x + 7 \leqslant 10$, donc on peut choisir $m = \frac{1}{10}$. (Pour les paresseux : le choix $m := 0$ aurait marché, aussi.) De façon semblable on trouve qu'on peut choisir $M = \frac{10}{7}$.

Exercice 4 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).$$

Solution On va démontrer que $\frac{E(nx)}{n}$ est un nombre réel tel que $E(x) \leqslant \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1$ (ceci implique le résultat). On va noter $k = E(x)$ et $\epsilon = x - E(x)$; on a donc que $x = k + \epsilon$. On trouve

$$\frac{E(nx)}{n} = \frac{E(n \cdot k + n \cdot \epsilon)}{n} = \frac{n \cdot k + E(n \cdot \epsilon)}{n} = k + \frac{E(n \cdot \epsilon)}{n} < k + 1,$$

où la dernière inégalité vient du fait que $n \cdot \epsilon < n$ (qui implique que $E(n \cdot \epsilon) < n$).

Exercice 5 Soient A et B deux parties non-vides majorées de $\mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Déterminer $\sup(A \cup B)$.

Solution La première question a été fait en cours. Pour la deuxième : on va noter $x := \sup(A)$ et $y := \sup(B)$.

On démontre deux choses : (a) $x \cdot y$ est un majorant de $A \cdot B$, car pour tout $a \in A$, $b \in B$ on a $a \leqslant x$ et $b \leqslant y$, ce qui implique $a \cdot b < x \cdot y$.

(b) On va démontrer que, quelque soit $t \in \mathbb{R}$ avec $t < x \cdot y$, il existent $a \in A$ et $b \in B$ tels que $a \cdot b > t$. En fait, on sait que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un élément a de A dans l'intervalle $[x - \epsilon, x]$ (et pareil un $b \in B$ dans l'intervalle $[y - \epsilon, y]$) ; on va choisir a et b de cette façon, pour une valeur de ϵ convenablement petite.

On voit que $(x - \epsilon)(y - \epsilon)$ peut être coincé de la façon suivante :

$$x \cdot y > (x - \epsilon)(y - \epsilon) = x \cdot y - (x + y)\epsilon + \epsilon^2 > x \cdot y - (x + y)\epsilon.$$

Si l'on choisit ϵ de façon pour que le terme de droite soit égal à t, à savoir $\epsilon := \frac{x \cdot y - t}{x + y}$, on obtient

$$a \cdot b > (x - \epsilon)(y - \epsilon) > x \cdot y - (x + y)\epsilon = t.$$

Finalement, $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 6 Trouver le sup et le inf des ensembles suivants

(a) $A_1 = \{x - y\ ,\ \ |x-1| \leqslant 2, -5 \leqslant y \leqslant -4\} = \{x + \widetilde{y}\ ,\ \ -1 \leqslant x \leqslant 3, 4 \leqslant \widetilde{y} \leqslant 5\}$, donc $\inf A_1 = 3, \sup A_1 = 8$.

(b) $A_2 = \{\frac{x}{y}\ ,\ \ |x-1| \leqslant 2, -5 \leqslant y \leqslant -4\} = \{x \cdot \widetilde{y}\ ,\ -1 \leqslant x \leqslant 3, -\frac{1}{4} < \widetilde{y} < -\frac{1}{5}\}$, donc $\inf A_2 = -\frac{3}{4}, \sup A_2 = \frac{1}{4}$.

(c) $A_3 = \{|x| - |y|\ ,\ -1 \leqslant x \leqslant 3, -5 \leqslant y \leqslant -4\} = \{|x|,\ -1 \leqslant x \leqslant 3\} + \{-|y|\ ,\ -5 \leqslant y \leqslant -4\} = [0,3] + [-5,-4]$, donc $\inf A_3 = -5$, $\sup A_3 = -1$.

(d) $A_4 = \{2n^2 - 9n + 4\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\}$. Le polynôme $P(n) = 2n^2 - 9n + 4$ prend des valeurs arbitrairement grands, donc A_4 n'est pas majoré, et $\sup A_4$ n'est pas défini. Pour trouver l'infimum, nous observons que $P(1) = -3$, $P(2) = -6$, $P(3) = -5$, et la suite $P(n)$ est strictement croissante pour $n > \frac{9}{4}$, donc on a $P(3) < P(4) < \ldots$. Donc $\inf A_4 = -6$.

(e) $A_5 = \{\frac{n^2-2n}{n^2+4}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\}$. On va noter $p_n = \frac{n^2-2n}{n^2+4} = \frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$. On observe que $|p_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $p_n \longrightarrow 1$ pour $n \to \infty$. Donc la suite p_n prend des valeurs plus petits que 1, mais arbitrairement proches de 1. On en déduit que $\sup A_5 = 1$. Pour trouver l'infimum, on remarque que $p_1 = -\frac{1}{5}$ et $p_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 2$. On obtient donc que $\inf A_5 = -\frac{1}{5}$.

(f) $A_6 = \{2^{-x}\cos(\frac{\pi}{x})\ ,\ \ x \in \mathbb{R}_+\}$. Nous affirmons que $\inf A_6 = -1, \sup A_6 = 1$. Nous allons démontrer que $\sup A_6 = 1$

Tout d'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|2^{-x}| \leqslant 1$ et $|\cos(\frac{\pi}{x})| \leqslant 1$, donc $|2^{-x}\cos(\frac{\pi}{x})| \leqslant 1$, ce qui implique que 1 est un majorant de A_6. D'autre part, nous considérons la suite $x_n = \frac{1}{2n}$ - ceci est une suite dans $\mathbb{R}_+$, et on a $\cos(\frac{\pi}{x_n}) = \cos(2\pi n) = 1$ pour tout n. On voit donc que A_6 contient des nombres $2^{-1/2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c.à.d. des nombres arbitrairement proches de 1 (car $2^{-1/2n} \to 1$ quand $n \to \infty$). Il n'y a donc pas de majorant de A_6 inférieur à 1.