Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 42 Donner les formes algébriques et trigonométriques des nombres complexes suivants:

(a) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$, **Solution** $= \frac{1-i}{2i} = -\frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\frac{5\pi i}{4})$.
(b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, **Solution** $\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2\cdot\exp(-\pi i/3)}{\sqrt{2}\exp(-\pi i/4)}$, et la 20ième puissance de ceci est $2^{10}\cdot\exp(-20\pi i/12) = 2^{10}\cdot\exp(\frac{\pi i}{3})$. La forme algébrique est $2^9(1+i\sqrt{3})$.
(c) $z_1 = \frac{1}{1-i\tan(\alpha)}$, **Solution** $= \frac{1+i\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \cos^2(\alpha)\cdot(1+i\tan(\alpha))$. Ceci est un nobre d'argument α et de module $\cos^(\alpha)\cdot\sqrt{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{|\cos(\alpha)|} = |\cos(\alpha)|$.
(d) $z_2 = 1-\cos(\theta)+i\sin(\theta)$. **Solution** Ceci est un nombre de module $\sqrt{(1-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)} = \sqrt{1+\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)-2\cos(\theta)} = \sqrt{2(1-\cos(\theta))}$. Comme 0 et z_2 sont tous les deux sur le cercle de rayon 1 autour du point 1, et forment un triangle isocèle, on a pour le module α que $\alpha = \frac{\pi-\theta}{2}$ si $\theta\in]0,\pi[$, et $\alpha = -\frac{\pi+\theta}{2}$ si $\theta\in]-\pi,0[$.

Exercice 43 Calculer les racines cubiques de $-1, i, -i$, et $1+i$.
Solution Nous rappellons que dès qu'on a trouvé une racine z_0, les deux autres racines sont $z_0\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_0\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
Les trois racines cubiques de -1 sont $-1, \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.
Les trois racines cubiques de i sont $-i, \frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$.
Les trois racines cubiques de $-i$ sont $i, \frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$.
Les trois racines cubiques de $1+i$ sont $\sqrt[6]{2}\exp(\frac{\pi i}{12})$, $\sqrt[6]{2}\exp(\frac{9\pi i}{12})$, $\sqrt[6]{2}\exp(\frac{17\pi i}{12})$.

Exercice 44 Montrer que

$$\cos(\frac{1}{13}\pi)+\cos(\frac{3}{13}\pi)+\ldots+\cos(\frac{11}{13}\pi) = \frac{1}{2}$$

Solution $0 = \exp(\frac{\pi i}{13})\cdot(1+\exp(\frac{2\pi i}{13})+\ldots+\exp(\frac{24\pi i}{13}) =$
$\exp(\frac{\pi i}{13})+\exp(\frac{3\pi i}{13})+\ldots+\exp(\frac{11\pi i}{13})+(-1)+\exp(\frac{15\pi i}{13})+\ldots+\exp(\frac{25\pi i}{13}) =$
$2\cdot Re\left(\exp(\frac{\pi i}{13})+\ldots+\exp(\frac{11\pi i}{13})\right)-1 =$
$2\left(\cos(\frac{\pi}{13})+\cos(\frac{3\pi}{13})+\ldots+\cos(\frac{11\pi}{13})\right)-1$.

Exercice 45(a) On considère le polynôme

$$P(z) = z^4+4z^3+6z^2+(6-2i)z+(3-2i)$$

Trouver les racines de P, sachant qu'il y en a une qui est réelle, et une autre qui est imaginaire pure. Dessiner les racines.

Solution La racine réelle z_0 doit satisfaire $-2iz_0-2i=0$. On obtient donc immédiatement la racine $z_0=-1$.

Ensuite, par division de polynômes on trouve $z^4+4z^3+6z^2+(6-2i)z+(3-2i) = (z^3+3z^2+3z+3-2i)(z+1)$. Pour trouver la racine purement imaginaire $i \cdot z_1$ de $z^3+3z^2+3z+3-2i$, on observe qu'elle doit satisfaire $-3z_1^2+3=0$ (en regardant la partie réelle). Il vient $z_1 = 1$ ou $z_1 = -1$. Il faut encore vérifier si les solutions potentielles $z = i$ et $z = -i$ sont vraiment des solutions.

Pour $z = -i$ on obtient $z^3+3z^2+3z+3-2i = i-3i-2i = -4i \neq 0$, donc $-i$ n'est pas une racine. Pour $z = i$ on obtient $z^3+3z^2+3z+3-2i = 0$, donc i est une racine.

Par une deuxième division de polynômes on obtient $z^3+3z^2+3z+3-2i = (z^2+(3+i)z+(2+3i))(z-i)$. Les racines de $z^2+(3+i)z+(2+3i)$ se calculent comme d'habitude : $\Delta = -6i$, et les racines de Δ sont $\pm(\sqrt{3}-i\sqrt{3})$, et les deux racines encore manquantes sont $\frac{-3-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{2}$.

(b) (Examen terminal 2004) Soit θ un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'inéquation d'inconnue Z :

$$Z^2 - 2\sin(\theta)Z + \tan^2(\theta) = 0.$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'inéquation d'inconnue z

$$z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + \tan^2(\theta) = 0.$$

Solution On calcule $\Delta = 4\sin^2(\theta) - 4\tan^2(\theta) = 4(\tan^2(\theta)(\cos^2(\theta)-1) = -4\tan^2(\theta)\sin^2(\theta)$. Les racines de Δ sont $\pm 2i|\tan(\theta)\cdot\sin(\theta)|$. Il vient $Z = \sin(\theta)(1 \pm i\tan(\theta))$, ou en coordonnées polaires, $Z = \exp(\pm i\theta) \cdot \sin(\theta)| \cdot \sqrt{1+\tan^2(\theta)} = \exp(\pm i\theta) \cdot |\tan(\theta)|$.

Exercice 46 Exprimer $\tan(3\varphi)$ en fonction de $\tan(\varphi)$. **Solution** Soit $t := \tan(\varphi)$. Alors $(1+it)^3 = 1-3t^2+i(3t-t^3)$. On en déduit que $\tan(3\varphi) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$.

Exercice 47 Soient u, v deux nombres complexes de module 1 (c.à.d. $|u| = |v| = 1$) tels que $u \neq -\overline{v}$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.
Solution Tout d'abord, pour des nombres complexes de module 1 on a $\overline{v} = \frac{1}{v}$. Donc la condition $u \neq -\overline{v}$ revient à dire que $uv \neq 1$, c.à.d., l'expression $\frac{v+v}{1+uv}$ est bien-définie. On calcule

$$\frac{u+v}{1+uv} = \frac{(u+v)\cdot(1+\overline{uv})}{(1+uv)\cdot(1+\overline{uv})} = \frac{u+v+\overline{u}u\overline{v}+\overline{v}v\overline{u}}{|1+uv|^2} = \frac{u+\overline{u}+v+\overline{v}}{|1+uv|^2}.$$

Ce nombre est réel, car numérateur et dénominateurs sont réels.

Exercice 48 Soit $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$. Montrer que l'un des nombres $|1+u|$ ou $|1+u^2|$ est supérieur ou égal à 1. Étudier le cas d'égalité.
Solution Il est une bonne idée de faire un dessin de la situation ! Si $u = \exp(i\theta)$, alors

$$|1+\exp(i\theta)|^2 = (1+\exp(i\theta))(1+\exp(-i\theta)) = 1+2\cdot Re(exp(i\theta))+1 = 2(1+\cos(\theta)).$$

On a donc $|1 + \exp(i\theta)| < 1$ ssi $2(1 + \cos(\theta)) < 1$, ssi $\cos(\theta) < -\frac{1}{2}$ ssi $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ $(mod 2\pi)$. Par le même argument, on a $|1+u^2| < 1$ si et seulement si $\frac{2}{3}\pi < 2\theta < \frac{4}{3}\pi$ $(mod 2\pi)$. Il n'y a pas de valeur θ telle que les deux inégalités sont satisfaites.

Exercice 49 Nous considérons l'application

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

(a) Soit K_1 le cercle de centre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et de rayon 1. Déterminer et dessiner $f(K_1)$, l'image du cercle par f. **Solution** La droite qui traverse les points $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-i}{\sqrt{2}}$.

(b) Soit K_2 le cercle de centre $1 + i$ et de rayon 2. Déterminer et dessiner $f(K_2)$, l'image du cercle par f. **Solution** Le cercle de centre $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ et de rayon 1.