

Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 42 Donner les formes algébriques et trigonométriques des nombres complexes suivants:

(a) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$, (b) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$, (c) $z_1 = \frac{1}{1-i\tan(\alpha)}$, (d) $z_2 = 1 - \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Exercice 43 Calculer les racines cubiques de $-1, i, -i$, et $1 + i$.

Exercice 44 Montrer que

$$\cos\left(\frac{1}{13}\pi\right) + \cos\left(\frac{3}{13}\pi\right) + \dots + \cos\left(\frac{11}{13}\pi\right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 45(a) On considère le polynôme

$$P(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6 - 2i)z + (3 - 2i)$$

Trouver les racines de P , sachant qu'il y en a une qui est réelle, et une autre qui est imaginaire pure. Dessiner les racines.

(b) (**Examen terminal 2004**) Soit θ un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre dans \mathbb{C} l'inéquation d'inconnue Z :

$$Z^2 - 2\sin(\theta)Z + \tan^2(\theta) = 0.$$

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'inéquation d'inconnue z

$$z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + \tan^2(\theta) = 0.$$

Exercice 46 Exprimer $\tan(3\varphi)$ en fonction de $\tan(\varphi)$.

Exercice 47 Soient u, v deux nombres complexes de module 1 (c.à.d. $|u| = |v| = 1$) tels que $u \neq -\bar{v}$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est réel.

Exercice 48 Soit $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$. Montrer que l'un des nombres $|1 + u|$ ou $|1 + u^2|$ est supérieur ou égal à 1. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 49 Nous considérons l'application

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

(a) Soit K_1 le cercle de centre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et de rayon 1. Déterminer et dessiner $f(K_1)$, l'image du cercle par f .

(b) Soit K_2 le cercle de centre $1 + i$ et de rayon 2. Déterminer et dessiner $f(K_2)$, l'image du cercle par f .