Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 39 Donner les formes algébriques et trigonométriques des nombres complexes suivants :

$$\textbf{(a)}\ \sqrt{3}+i \qquad \textbf{(b)}\ (1-i)^3 \qquad \textbf{(c)}\ \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)^5}$$

Exercice 40 Calculer les racines carrées des nombres suivantes

$$\textbf{(a)}\ 1+4\sqrt{5}i \qquad \textbf{(b)}\ 3-4i \qquad \textbf{(c)}\ -45-8i$$

Exercice 41 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

(a) $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$ **(b)** $z^2-3z+4=0$ **(c)** z^4+10z^2+169

(d) $z^3-(2+3i)z^2+(3+5i)z+6+2i=0,$ sachant qu'il y a une racine réelle

(e) $iz^3+(4i-6)z^2-(17+8i)z-15i-3=0,$ sachant qu'il y a une racine imaginaire

$$\textbf{(g)}\ z^4=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \qquad \textbf{(h)}\ (z-2)^n+(z+2)^n=0 \qquad \textbf{(i)}\ z^5=\overline{z}.$$

Solutions des exercices 35–38

Exercice 35 Démontrer par un calcul direct que

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a) \cdot \mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a) \cdot \mathrm{sh}(b).$$

Solution

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) &= \frac{1}{2}(e^a \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}) \\
&= \frac{1}{4}(e^a \cdot e^b + e^a \cdot e^{-b} + e^{-a} \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b} + e^a \cdot e^b - e^a \cdot e^{-b} - e^{-a} \cdot e^b + e^{-a} \cdot e^{-b}) \\
&= \frac{1}{4}(e^a + e^{-a}) \cdot (e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a}) \cdot (e^b - e^{-b})
\end{aligned}$$

Exercice 36 Resoudre les équations suivantes

(a) $\arcsin(x) - \arccos(x) = 2 \cdot \arctan(2x) - \frac{\pi}{2}$. (Indication : utiliser l'égalité $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$)

Solution L'égalité est définie pour $x \in [-1, 1]$. Prendre la somme avec l'égalité $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ donne l'égalité $2 \cdot \arcsin(x) = 2 \cdot \arctan(2x)$, ou encore $\arcsin(x) = \arctan(2x)$. Comme la fonction tan est injective sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ceci est équivalent à l'égalité $\tan(\arcsin(x)) = 2x$. Cette égalité est équivalente à

$$2x = \tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On voit qu'une solution est $x = 0$. Si l'on suppose que $x \neq 0$, ceci est encore équivalent à $2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et donc à $1 - x^2 = \frac{1}{4}$. On déduit que les autres solutions (à part $x = 0$) sont $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

Solution En prenant la tangente des des membres on obtient l'équation équivalente $1 = \tan(\frac{\pi}{4}) = \tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, où $a = \arctan(2x)$ et $b = \arctan(x)$. On a donc léquation $1 = \frac{2x+x}{1-2x\cdot x} = \frac{3x}{1-2x^2}$. Les solutions de l'équation $1 - 2x^2 - 3x = 0$ sont $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

Exercice 37 Calculer la dérivée des fonctions $x \mapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ et $x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(2x))$. En déduire que pour tout nombre réel x on a

$$2 \arctan(\mathrm{th}(x)) = \arctan(\mathrm{sh}(2x)).$$

Solution La dérivée de la première fonction est $\frac{1}{1+\mathrm{th}^2(x)} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}$, la dérivée de la deuxième est $\frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(2x)} \cdot 2\mathrm{ch}(2x) = \frac{2\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{ch}^2(2x)} = \frac{2}{\mathrm{ch}(2x)} = \frac{2}{\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{sh}^2(x)}$, ce qui est deux fois la dérivée de la première. En plus, les deux fonctions prennent la valeur 0 en $x = 0$.

Exercice 38(a) Montrer que pour tout nombre $x > 0$ on a des inégalités

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Solution On considère la fonction $f(x) = \ln(x)$. Pour tout t dans l'intervalle $]x, x+1[$ on a $f'(t) = \frac{1}{t}$, et donc $\frac{1}{x+1} < f'(t) < \frac{1}{x}$. L'intervalle $[x, x+1]$ est de longueur $l = 1$ (évidemment). D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $\frac{1}{x+1} \cdot l < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x} \cdot l$, ce qui implique le résultat.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln(n).$$

Solution On a $\ln(n+1) = \ln(1) + (\ln(2) - \ln(1)) + \ldots + (\ln(n) - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln(n)) < 0 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$, ce qui démontre la première inégalité.

La deuxième inégalité est vrai pour $n = 1$ (parce que $1 \leqslant 1$), et pour $n > 1$ on a $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < (\ln(2) - \ln(1)) + \ldots + (\ln(n) - \ln(n-1)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$.

(c) Regardons la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Solution La suite est décroissante parce que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) < 0,$$

où la dernière inégalité est un cas particulier de la première inégalié de (a). En plus, d'après la première inégalité de (b) on a $u_n > \ln(n+1) - \ln(n)$, ce qui est strictement positif, parce que la fonction ln est strictement croissante. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_n > 0$. La suite u_n est donc décroissante et minorée, et on peut conclure, d'après un théorème du cours, qu'elle est convergente.

Remarque : la limite de la suite u_n est connue sous le nom de "constante d'Euler-Mascheroni", et elle vaut à peu près $0,5772156649$. Il est une question ouverte si ce nombre est rationnel ou irrationnel. On sait juste que si la limite s'écrit comme fraction $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, alors $q > 10^{242080}$.