Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 1 Démontrer que pour tout couple (a, b) de nombres réels on a

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Exercice 2 Déterminer l'ensemble de tous les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels les inéquations suivantes sont satisfaites. (Attention, dans chaque cas il faut déterminer d'abord pour quels valeurs de x elles sont définies, même si ce n'est pas demandé explicitement !)

(a) $\frac{x-5}{x+2} > 0$ **(b)** $\frac{x^2+2x}{x-3} > 0$ **(c)** $x^3 + 4x^2 > x + 4$
(d) $\sqrt{x+1} \leqslant 2 - x$ **(e)** $\sqrt{x+1} \leqslant 1 - x$ **(f)** $\sqrt{x+1} \leqslant x - 1$

Exercice 3 Trouver (avec le moins de travail possible) des nombres $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant |\frac{x^2+1}{x+7}| \leqslant M$ pour tout réel x avec $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Exercice 4 Soit x un nombre réel positif, et soit n un nombre entier ($x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$). Montrer que

$$E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x).$$

(Indication : on pourra écire $x = k + \epsilon$, où $k \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in [0, 1)$.)

Exercice 5 Soient A et B deux parties non-vides majorées de $\mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \quad \text{et} \quad \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Déterminer $\sup(A \cup B)$.

Exercice 6 Trouver le sup et le inf des ensembles suivants

(a) $A_1 = \{x - y\ ,\ \ |x-1| \leqslant 2 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant -4\}$

(b) $A_2 = \{\frac{x}{y}\ ,\ \ |x-1| \leqslant 2 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant -4\}$

(c) $A_3 = \{|x| - |y|\ ,\ \ |x-1| \leqslant 2 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant -4\}$

(d) $A_4 = \{2n^2 - 9n + 4\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\}$

(e) $A_5 = \{\frac{n^2-2n}{n^2+4}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\}$ (Indication: reécrire $\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$. On pourra utiliser la notion de *convergence d'une suite*, qu'on n'a pas encore appris officiellement...)

(f) $A_6 = \{2^{-x}\cos(\frac{\pi}{x})\ ,\ \ x \in \mathbb{R}_+\}$

Exercices sur les majorants et minorants

Exercice 1 Déterminer la borne supérieure et inférieure pour les ensembles A suivants (si elle existe). En chaque cas, déterminer si elle appartient à l'ensemble A. Comme toujours, justifiez toutes vos reponses.

(a) $A = \{2n^2 - 9n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(b) $A = \{\frac{n^2-2n}{n^2+4} \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Indication: dans le cas $n \neq 0$, reécrire $\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$.)

(c) $A = \{\frac{n^2-1}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(d) $A = \{\frac{n}{n+1} E(\frac{n+4}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$, où $E(x)$ note la partie entière de x.

Exercice 2 On suppose que $|x - 1| \leqslant 2$ et que $-5 \leqslant y \leqslant -4$. Encadrer les quantités suivantes:

(a) $x + y$ **(b)** $x - y$ **(c)** xy **(d)** $\frac{x}{y}$ **(e)** $|x| - |y|$

Exercice 3 Soit x un nombre réel positif, et soit n un nombre entier ($x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$). Montrer qu'on a $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$, où $E(x)$ note la partie entière.

Exercice 4 Soient A et B deux parties non-vides majorées de $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ et que $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Exercice 5 Soit $f(x) = 2^{-x+1} \cdot \sin(\frac{1}{x})$. Déterminer la borne supérieure et inférieure de l'ensemble

$$\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in]0, +\infty[,\ y = f(x)\}$$

Exercices sur les inégaltés et la valeur absolue

Exercice 6 Démontrer que pour tout couple (a, b) de nombre réels on a

$$\sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Exercice 7 Pour quelles valeurs de x les inéquations suivantes sont-elles définies ? Pour quelles valeurs de x sont-elles vraies ?

(a) $\sqrt{x+1} \leqslant 1 - x$ **(b)** $\sqrt{x+1} \leqslant x - 1$ **(c)** $\sqrt{x+1} \leqslant 2 - x$
(d) $(x + 1)^2 \geqslant |x - 2|$

Exercices sur les suites

Exercice 8 Soit (u_n) une suite croissante de nombres réels positifs. Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{u_n}$ est convergente. (Indication : distinguer deux cas, à savoir si (u_n) est bornée ou non.)

Montrer que résultat est faux si l'on enlève l'hypothèse que tous les termes de la suite doivent être positifs.

Exercice 9 Dans cet exercice on étudie la suite $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+x}}}$ (n racines emboitées). Plus formellement, on regarde la suite définie de façon recurrente, par la rélation

$$u_0 > -1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

(a) Déterminer le signe de $\sqrt{1+x} - x$ pour $x > -1$

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(**(c)** Calculer $\lim u_n$.)

Exercice 10 Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout entier n.

(a) Montrer que l'on a $u_n > \sqrt{2}$ pour tout entier n.

(b) Montrer que la suite est convergente. (Indication: montrer d'abord qu'elle est strictement décroissante.)

On peut, en fait, démontrer que la suite converge vers $\sqrt{2}$. Pour ceci on pose $e_n = u_n - \sqrt{2}$, et on va essayer de démontrer que la suite e_n tend vers 0.

(c) Montrer que l'on a $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$. En déduire que l'on a $e_{n+1} < \frac{e_n^2}{2}$.

(**(d)** Déduire que $\lim u_n = \sqrt{2}$.)