Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Avril 2006
Feuille No. 8

Groupes

Exercice 1 On considère les ensembles suivants, qui sont munis d'une loi de composition. Décider s'il s'agit de groupes.

(a) $(\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ bijective}\}, *)$, avec $f * g = f \circ g$.

(b) $(\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, *)$, avec $f * g = f \circ g$.

(c)* $(\mathbb{R}, *)$, avec $x * y = x + y - 1$.

Exercice 2 Soit G un groupe tel que tout élément est d'ordre 2 ($\forall x, x^2 = e$). Montrer que G est commutatif.

Exercice 3 Soit G un groupe fini sans élément d'ordre 2. Montrer que $|G|$ est impair (c.à.d. G a un nombre impair d'éléments).

Exercice 4 (a) Si $\sigma \in S_5$, montrer que $\text{ordre}(\sigma) \leqslant 6$.

(b) Déterminer les ensembles

$$X_n = \{\text{ordre}(\sigma) \mid \sigma \in S_n\}$$

pour $n = 7$ et $n = 8$.

Exercice 5 Écrire les permutations suivantes comme produits de cycles disjoints, et décider s'il s'agit de permutations paires ou impaires:

(a) $(3\ 1\ 4)(1\ 5\ 9\ 2\ 6)(5\ 3)$

(b) σ^{-1}, où $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$

Exercice 6 Soit $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Calculer σ^{200}.

Exercice 7***(a)** Montrer que S_n est engendré par $\{(1, i) \mid 2 \leqslant i \leqslant n\}$. (Indication : il suffit de démontrer que toute transposition peut être écrite comme produit de transpositions du type $(1, i)$.)

(b) Montrer que S_n est engendré par $\{(1, 2), (1, 2, 3, \ldots, n)\}$. (Indication : on a déjà démontré en cours que S_n est engendré par les transpositions $(i, i + 1)$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.)

Solutions des exercices

1(a) Oui, il s'agit d'un groupe. La composition de deux fonctions bijectives $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est encore une fonction bijective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donc la composition est une loi binaire bien-définie sur l'ensemble des bijections $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La composition est associative. Il existe un élément neutre, à savoir la fonction identité id – en effet, pour toute bijection f on a $f \circ id = f = id \circ f$. Enfin, la fonction inverse f^{-1} d'une bijection $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est, elle aussi, une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui satisfait la condition $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

(b) Non, il ne s'agit pas d'un groupe. En effet, la seule fonction g qui a la propriété que $f \circ g = f$ pour toute fonction f est la fonction identité id. Donc le seul candidat pour le rôle de l'élément neutre est la fonction id. Or, pour la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \forall x$, il n'éxiste pas de fonction f^{-1} qui aurait la propriéé que $f^{-1} \circ f = id$.

(c)* Cette question était dure. Oui, il s'agit d'un groupe avec élément neutre 1, et l'inverse de x est $-x+1$. Pour tester l'associativité on fait un petit calcul : $(x*y)*z = (x+y-1)+z-1 = x+y+z-2 = x+(y+z-1)-1 = x*(y*z)$.

2 Si $g, h \in G$, alors

$$g \cdot h = g \cdot h \cdot \underbrace{(h \cdot g)^2} = g \cdot \underbrace{h \cdot h} \cdot g \cdot h \cdot g = \underbrace{g \cdot g} \cdot h \cdot g = h \cdot g$$

où chaque accolade indique une expression qui est égale à l'élément neutre dans G.

3 Comme il n'y a pas d'élément d'ordre 2, on obtient tout élément, sauf l'élément neutre 1, est différent de son propre inverse : $\forall g \in G \setminus \{e\}, g \neq g^{-1}$. On en déduit que $|G \setminus \{e\}|$ est pair, car les élément de $G \setminus \{e\}$ sont appareillés en couples (g, g^{-1}). Car $|G| = |G \setminus \{e\}| + 1$ on conclut que $|G|$ est impair.

4 Cette question est un peu fastidieuse. L'idée est toujours de regarder les longueurs des cycles dans la décomposition en cycles disjoints de σ.

(a)

- Si $\sigma = id$, alors $ord(\sigma) = 1$. Sinon,
- si tous les cycles sont de longueur 1 ou 2, alors $ord(\sigma) = 2$
- si tous les cycles sont de longueur 1 ou 3, alors $ord(\sigma) = 3$
- s'il y a un cycle de longeur 4, alors l'autre cycle est de longueur 1 – donc σ a une décomposition en cycles de la forme $(****)(*)$, et $ord(\sigma) = 4$
- si σ est un cycle de longueur 5, alors $ord(\sigma) = 5$
- s'il y a un cycle de longueur 2 et un cycle de longueur 3, alors σ est de la forme $(***)(**)$, et $ord(\sigma) = ppcm(2,3) = 6$.

(b) Dans le cas $n = 7$, les ordres possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12$.

Dans le cas $n = 9$, les ordres possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 20$.

5(a) $(3\ 9\ 2\ 6\ 4)(1\ 5)$. La permutation $(3\ 9\ 2\ 6\ 4)$ est paire, la permutation $(1\ 5)$ est impaire donc le produit des deux est impair.

(b) $\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$, ce qui est une parmutation paire.

6 Comme $\sigma = (1\ 10\ 5\ 7\ 2\ 9\ 4)(3\ 8\ 6)$, on trouve que $ord(\sigma) = ppcm(7, 3) = 21$. Donc, $\sigma^{k\cdot 21} = id$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ – en particulier, $id = \sigma^{9\cdot 21} = \sigma^{189}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\sigma^{200} &= \sigma^{11} \\
&= (1\ 10\ 5\ 7\ 2\ 9\ 4)^{11}(3\ 8\ 6)^{11} \\
&= (1\ 10\ 5\ 7\ 2\ 9\ 4)^{7}(1\ 10\ 5\ 7\ 2\ 9\ 4)^{4}(3\ 8\ 6)^{9}(3\ 8\ 6)^{2} \\
&= (1\ 10\ 5\ 7\ 2\ 9\ 4)^{4}(3\ 8\ 6)^{2} \\
&= (1\ 2\ 10\ 9\ 5\ 4\ 7)(3\ 6\ 8)
\end{aligned}$$