Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Mars 2006
Feuille No. 7

Relations d'ordre

Exercice 1 Tracer les diagrammes des ordres suivants :

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, muni de l'ordre $x \leqslant y$ ssi $x|y$.

(b) L'ensemble des diviseurs de 36 dans $\mathbb{N}$, muni du même ordre que dans (a).

(c) Si X est un ensemble, alors on peut définir un ordre partiel sur l'ensemble des partitions : si $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{j \in J} B_j$ sont deux partitions de X, on va dire que la premiere est plus petite que la deuxième si elle est "plus fine", c.à.d. si chaque ensemble A_i est un sous-ensemble d'un des ensembles B_j.

Tracer le diagramme de l'ensemble des partitions de $\{1, 2, 3\}$, muni de cet ordre.

Exercice 2 On va étudier des ordres sur des produits d'ensembles ordonnés. Soient $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés. Préciser si les relations $\prec$ suivantes sur $E \times F$ sont des relations d'ordre.

(a) $((e, f) \prec (e', f')) \;\Leftrightarrow\; (e \leqslant_E e' \text{ et } f \leqslant_F f')$.

(b) $((e, f) \prec (e', f')) \;\Leftrightarrow\; ((e \leqslant_E e' \text{ et } e \neq e') \text{ ou } (e = e' \text{ et } f \leqslant_F f'))$

Dans le cas spécial où $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ sont juste les entiers rélatifs $\mathbb{Z}$, munis de l'ordre habituel, est-ce que les ordres $\prec_{(\mathbf{a})}$ et $\prec_{(\mathbf{b})}$ sont des ordres *totaux* sur $\mathbb{Z}^2$?

Exercice 3 Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles fermés $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (où $a \leqslant b$). Comme d'habitude, $\mathcal{I}$ est ordonné par l'inclusion.

(a) Existe-t-il des éléments maximaux, minimaux ?

(b) Montrer que sur $\mathcal{I}$ on peut définir $\sup\{[a, b], [c, d]\}$ pour toute paire d'intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$.

(c) Quelles conditions $[a, b]$ et $[c, d]$ doivent-ils vérifier pour que l'on puisse définir sur $\mathcal{I}$ la borne inférieure de ces intervalles ?

Exercice 4 Montrer que tout ensemble fini totalement ordonné admet un plus petit élément et un plus grand élément. (Indication : récurrence.)