Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Mars 2006
Feuille No. 6

Relations d'équivalence

Exercice 1 Décrire les classes d'équivalence et l'ensemble quotient pour les relations R suivantes sur un ensemble E

(a) $E = \mathbb{Z}$, $(x \sim y) \Leftrightarrow (x - y \in n\mathbb{Z})$

(b) $E = \mathbb{R}$, $(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $x - y = 2k\pi)$

(c) $E = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(\vec{x}_1 \sim \vec{x}_2) \Leftrightarrow (\vec{0}\vec{x}_1\vec{x}_2$ sont alignés ou $\vec{0}\vec{x}_2\vec{x}_1$ sont alignés$)$

(d) $E = C^0(\mathbb{R}) = \{$fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \Leftrightarrow (f(0) = g(0))$

Exercice 2 **(a)** Donner une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ telle que l'ensemble quotient est $\mathbb{Q}$.

(b) Donner une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que l'ensemble quotient est $\mathbb{Z}$.

(c) Quelle relation d'équivalence sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ permet de définir un cylindre ? Un tore ? Un ruban de Möbius ?

Exercice 3 Considérons l'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, et soit m le polynôme $x^2 + 1$. Nous allons regarder la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathbb{R}[X] \text{ t.q. } f - g = h \cdot m.$$

Par exemple, les polynômes $3x^3 + 5$ et $4x^3 + x + 5 = 3x^3 + 5 + x(x^2 + 1)$ sont équivalents. Démontrer que l'ensemble quotient $\mathbb{R}[X]/\sim$ est en bijection avec $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes. (Indication : définir une application $\varphi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ convenable.)

Exercice 4 Déceler l'erreur dans le raisonnement suivant.

On va démontrer qu'une relation binaire sur X qui est symétrique et transitive est automatiquement réflexive (et donc une relation d'équivalence). Démonstration : si $x, y \in X$ avec $x \sim y$, alors on a aussi $y \sim x$, car la relation est symétrique. Or, le fait que $x \sim y$ et $y \sim x$ implique, par transitivité, que $x \sim x$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

Construire un exemple d'une relation symétrique et transitive nonreflexive.

Exercice 5 Décrire la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ associée à l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Exercice 6 Soit E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et A un sous-ensemble de E. On définit

$$f\colon \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \quad \text{par} \quad f(X) = X \cap A$$

Montrer que l'ensemble quotient associé à f est en bijection avec l'ensemble des parties de A.