Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Février 2006

Ensembles finis

Exercice 1 Démontrer (par récurrence) que l'ensemble des parties d'un ensemble avec k éléments a 2^k éléments.

Exercice 2 Démontrer qu'un ensemble fini autant de sous-ensembles avec un nombre pair d'elements que de sous-ensembles avec un nombre impair d'elements. Indication : on a essentiellement vu la solution sur une feuille d'exos précédente.

Exercice 3(a) Soit m un entier positif, et soit X un ensemble avec $m+1$ éléments. Combien d'applications *surjectives* $f\colon\ X \to \{1, \ldots, m\}$ y a-t-il ?

(b)* Soient n et p deux entiers positifs avec $n > p$, et soit $X = \{1, \ldots, p\}$. Combien d'applications

$$f\colon\ X \to \mathbb{N} \quad \text{telle que} \quad \sum_{i=1}^{p} f(i) = n$$

y a-t-il ? (Indication : la réponse est $\binom{n+p-1}{p-1}$.)

Ensembles dénombrables

Exercice 4 Démontrer qu'un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

En cours on a démontré que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable. On pourra généraliser cette démonstration pour démontrer le résultat suivant:

Exercice 5 Soit I un ensemble dénombrable, et pour tout éleément i de I soit A_i un ensemble dénombrable. Alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{est dénombrable.}$$

En cours on démontre que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. Ceci contraste avec le résultat suivant.

Exercice 6 Démontrer que

$$\{\ A \ \mid\ A \text{ un sous-ensemble de } \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{Card}(A) < \infty\}$$

(c.à.d. l'ensemble de tous les sous-ensembles *finis* de $\mathbb{N}$) *est* dénombrable. (Indication : on peut utiliser le résultat de l'exo 5.)

Exercice 7* Soit X un ensemble infini tel qu'il existe une surjection $f\colon \mathbb{N} \to X$. Démontrer qu'il existe en fait une *bijection* $g\colon \mathbb{N} \to X$ (c.à.d. X est dénombrable).

Un peu de vocabulaire anglais

vrai/faux – true/false ; table de vérité – truth table ; et/ou – and/or
démonstration par l'absurde – proof by contradiction
démonstration par récurrence – proof by induction
la contraposée - the contrapositive
Nous notons I l'intervalle $[0, 1]$ – we denote I the interval $[0, 1]$
Attention: le verbe anglais "to note" signifie "remarquer" (et non pas "noter") !
sous-ensemble – subset ; ensemble vide – the empty set
A est inclus dans B – A is contained in B
réunion et intersection – union and intersection
le complémentaire – the complement
l'ensemble des parties – the power set
une application – a map (ou : a mapping) ; une suite – a sequence
image réciproque – preimage ou inverse image
(non) dénombrable – (un)countable ou (non)enumerable