Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Février 2006

Théorie des ensembles (2)

Exercice 1 Soit $f\colon A \to B$ une application. Soient X et Y des sous-ensembles de A, et soient S et T des sous-ensembles de B. Peut-on déduire les affirmations suivantes ? Justifiez toutes vos réponses.

(a) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$,
(b) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
(c) $f(\mathcal{C}X) = \mathcal{C}(f(X))$,
(d) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$,
(e) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$,
(f) $f^{-1}(\mathcal{C}S) = \mathcal{C}(f^{-1}(S))$.

Exercice 2(a) Soient A et B deux ensembles, et $f\colon A \to B$ une application. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes

(i) pour toute partie X de A on a $f^{-1}(f(X)) = X$, et
(ii) f est injective.

(b) Même question pour les propositions:

(i) pour toute partie Y de B on a $f(f^{-1}(Y)) = Y$, et
(ii) f est surjective

Exercice 3 Soient A et B deux ensembles, et soit $f\colon A \to B$ une application. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes:

(i) pour toutes parties X_1, X_2 de A, on a $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, et
(ii) f est injective.

Exercice 4 Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ des applications. Demontrer

(a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Donner un exemple pour démontrer que g n'est pas forcement injective.

(b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Donner un exemple pour démontrer que f n'est pas forcement surjective.