Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Janvier 2006

Théorie des ensembles

Exercice 1 Représenter $\mathcal{C}_E A, \mathcal{C}_E B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ et $A \Delta B$ lorsque

(a) $E = \mathbb{R}$, $A = \{x \in E \mid x^2 - 2 < 0\}$ et $B = \mathbb{Z}$.

(b) $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \in E \mid x^2 + y^2 - 1 < 0\}$,
et $B = \{(x,y) \in E \mid x \cdot y < 0\}$.

(c) $E = \mathbb{C}$, $A = \{z \in E \mid |z| \leqslant 1\}$ et $B = \{z \in E \mid Re(z) < 0\}$.

Exercice 2 La loi Δ est-elle commutative ? Est-elle associative ? La loi Δ, est-elle distributive par rapport à l'intersection ? Dans chaque cas, donner une démonstration ou un contre-exemple.

Exercice 3 Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.

(a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(1)\ A = B \qquad (2)\ A \setminus B = B \setminus A \qquad (3)\ A \Delta B = \emptyset$$

(b) Montrer que les six propriétés suivantes sont équivalentes:

$$(1)\ A \subset B \qquad (2)\ B^c \subset A^c \qquad (3)\ A \cap B = A$$
$$(4)\ A \cup B = B \qquad (5)\ A \setminus B = \emptyset \qquad (6)\ A \Delta B = B \setminus A$$

Exercice 4 Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? (Si oui, donner une démonstration, si non, donner un contre-exemple)

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, **(b)** $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

Exercice 5 Soit E un ensemble non vide, et soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Dans quel cas a-t-on

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \ ?$$

Exercice 6 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

(a) On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que B est un sous-ensemble de C.

(b) Attention, si $A \cap B = A \cap C$, on ne peut *pas* déduire que $B = C$! Donner un exemple pour montrer que, en général, l'implication ($A \cap B = A \cap C \ \Rightarrow \ B = C$) est fausse.

Exercice 7 Soient A, B, C et D des parties d'un ensemble E. Montrer les égalités

(a) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ **(b)** $E = (A \Delta B) \cup (A \Delta B^c)$.

Exercice 8* Soit E un ensemble non vide, et soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Donner une condition necessaire et suffisante pour que les ensembles $A \setminus B$, $B \setminus C$, A^c et C forment une partition de E.

Exercice 9 On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ainsi que

$$A = \{(i, j) \in E^2 \mid i < j\},\ B = \{(i, j) \in E^2 \mid i = j\},\ C = \{(i, j) \in E^2 \mid i > j\}.$$

Les représenter par un dessin, et montrer que A, B, C forment une partition de $E \times E$.

Exercice 10 Soient A et B deux parties d'un ensemble E, et soient C et D deux parties d'un ensemble F. Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier votre reponse.

(a) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$ **(b)** $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$