Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Janvier 2006

Exercices sur l'écriture et la comprehension des démonstrations

Exercice 1 On considère la suite définie recursivement par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier n on a $u_n > \sqrt{2}$.

Exercice 2 Démontrer que pour tout entier n on a

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \qquad \textbf{(b)} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 3 Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$.

(a) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

(b) Proposer une valeur pour S_n et prouver votre affirmation.

Exercice 4 Montrer que, pour tout entier supérieur ou égal à 1 on a

$$\textbf{(a)} \quad \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k) \qquad \textbf{(b)} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Exercice 5 Soit n un entier. À l'aide de la formule du binôme appliquée à $(1+x)^n$, calculer

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p, \quad \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^p, \quad \sum_{p=1}^{n} pC_n^p, \quad \sum_{p=2}^{n} p(p-1)C_n^p, \quad \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p$$

Exercice 6 À l'exception du nombre 2, tout nombre premier p est impair. Donc p peut être de la forme $p = 4k+1$ pour $k \in \mathbb{N}$ (par exemple $p = 5, 13, 17$) ou de la forme $p = 4k+3$ (par exemple $p = 3, 7, 11, 19$). Pierre de Fermat a démontré qu'un nombre premier (autre que 2) s'écrit comme la somme de deux carrés si et seulement si il est de la forme $4k+1$ – par exemple, $13 = 3^2 + 2^2$, mais 11 n'est pas la somme de deux carrés. Voici deux exercices qui sont des résultats partiels/en rapport avec ce théorème.

(a) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$. (Indication : modifier la démonstration d'Euclide, et utiliser le fait que le produit de deux nombres de la forme $4k+1$ est de nouveau de la forme $4k+1$.)

(b) Démontrer qu'un nombre n de la forme $n = 4k + 3$ n'est pas une somme de deux carrés. (Indication : considérer la somme $a^2 + b^2$ ($a, b \in \mathbb{N}$), et distinguer des cas selon si a et b sont pair/impair.)

Exercice 7 On considère un "échiquier" avec $2^n \times 2^n$ carrés. Un des 2^{2n} carrés (dans une position arbitraire) est spécial : on l'appellera le carré interdit. On considére aussi des pavés en forme de "L" (qui couvrent trois carrés). Question : est-il possible de paver tout l'échiquier, sauf le carré interdit, avec les pavés donnés ?

(Cet exercice est purement pour votre amusement. Il est complètement irrelevant, et ne sera pas corrigé en cours. Indication : Récurrence.)

Exercices sur la logique et le calcul propositionnel (Solutions)

Exercice 1 Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes, ainsi que leur négation.

(a) La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée. **Solution** $\exists M \in \mathbb{R}_+, (\forall x \in \mathbb{R}, -M < f(x) < M)$. Négation: (en mots) pour tout réel positif M, il existe un entier x tel que $f(x)$ est supérieur à M ou inférieur à $-M$.

(b) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. **Solution** $\exists x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$. Négation (en mots): Tout réel entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ est irrationnel.

(c) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres. (Remarque: vous n'avez pas le droit d'inventer un symbole pour "il n'existe pas" !) **Solution** $\forall N \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N}, M > N$. Négation (en mots): Il existe un entier N tel que pour tout entier M on a $M < N$.

(d) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ des sous-ensembles d'un ensemble E, et soit x un élément de E.
(i) x appartient à tous les A_i.
(ii) x appartient à au moins deux des A_i.
Solution
(i) $\forall i \in \{1, \ldots, 17\}, x \in A_i$. Négation: il y a un entier entre 1 et 17 tel que $x \notin A_i$.
(ii) $\exists (i,j) \in \{1, \ldots, 17\} \times \{1, \ldots, 17\}, (i \neq j, x \in A_i, x \in A_j)$. La négation est "Il existe au plus un entier i entre 1 et 17 tel que $x \in A_i$". Formellement,

$$\forall i \in \{1, \ldots, 17\}, \forall j \in \{1, \ldots, 17\}, ((x \in A_i \text{ et } x \in A_j) \Rightarrow i = j)$$

Exercice 2 Donner la signification et la négation des propositions suivantes. (Ici, f note une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.)

(a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)$.

Solution Signification: $f(0) = 0$ et f est continue en 0. Négation (formule): $\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R},\ (|x| < \alpha \text{ et } |f(x)| > \epsilon)$.

(b) $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < M$.
Solution Signification: la suite u_n est bornée. Négation (formule) : $\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies pour tout couple de fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Dans le premier cas, donner une démonstration, dans le deuxième cas, donner un contre-exemple.

(a) $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \ \Leftrightarrow\ \big[(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)\big]$
Solution Vrai ! On va discuter la solution en cours.

(b) $(\exists x \in \mathbb{R}, f^2(x) + g^2(x) = 0) \ \Leftrightarrow\ \big[(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)\big]$
Solution Faux. Plus précisement, le deuxiéme énoncé n'implique pas le premier. Contreexemple: soit $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$. Alors $f(0) = 0$ et

$g(\frac{\pi}{2}) = 0$, mais $f^2(x) + g^2(x) = 1$ pour tout réel x.

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, la proposition énoncée est-elle vraie ? Justifier.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ ou } x^2 - y^2 \geqslant 0)$. **Solution** Vrai; étant donné x, il suffit de choisir $y = x$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 \neq x \text{ et } x^2 - y^2 < 0)$. **Solution** Faux. Effectivement, quel que soit x, l'enoncé "$x^2 - y^2 < 0$" est faux si l'on choisit $y = 0$. Donc, pour tout réel x, il existe un réel y, à savoir $y = 0$ tel que l'affirmation "$(y^2 + 1 \neq x \text{ et } x^2 - y^2 < 0)$" est fausse. (Autre réponse : c'est la négation de (a).)

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ et } x^2 - y^2 \geqslant 0)$. **Solution** Faux. Par exemple, pour $x = 0$ il n'existe aucun réel y tel que $y^2 + 1 = x$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ ou } x^2 - y^2 \geqslant 0)$. **Solution** Faux. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors avec $y = 0$ les deux affirmations sont fausses.