Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours B03, Janvier 2006

Exercices sur la logique et le calcul propositionnel

Exercice 1 Écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes, ainsi que leur négation.

(a) La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée.

(b) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(c) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur à tous les autres. (Remarque: vous n'avez pas le droit d'inventer un symbole pour "il n'existe pas" !)

(d) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ des sous-ensembles d'un ensemble E, et soit x un élément de E.
(i) x appartient à tous les A_i.
(ii) x appartient à au moins deux des A_i.

Exercice 2 Donner la signification et la négation des propositions suivantes. (Ici, f note une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.)

(a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ (|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \epsilon)$.

(b) $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < M$.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies pour tout couple de fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Dans le premier cas, donner une démonstration, dans le deuxième cas, donner un contre-exemple.

(a) $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0) \;\Leftrightarrow\; \big[(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)\big]$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R}, f^2(x) + g^2(x) = 0) \;\Leftrightarrow\; \big[(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)\big]$

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, la proposition énoncée est-elle vraie ? Justifier.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ ou } x^2 - y^2 \geqslant 0)$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 \neq x \text{ et } x^2 - y^2 < 0)$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ et } x^2 - y^2 \geqslant 0)$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (y^2 + 1 = x \text{ ou } x^2 - y^2 \geqslant 0)$.