Feuille d'exercices 3. Algèbre linéaire (suite)

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Applications linéaires

Test 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix})$.

(b) Ecrire $f(\vec{x})$ sous la forme $A.\vec{x}$ pour une certaine matrice A. Utiliser cette matrice pour calculer d'une autre manière $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix})$.

(c) Vérifier que les colonnes de la matrice de f sont $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$, où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Test 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On suppose qu'il existe $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_2) = (-3)\vec{v}_2$$

On rappelle que $f^n(\vec{v}) = f(f(...f(\vec{v})\dots))$.

(a) Déterminer $f(f(\vec{v}_1))$, $f(f(f(\vec{v}_1)))$, $f^4(\vec{v}_1)$.

(b) Déterminer $f^n(\vec{v}_1)$ et $f^n(\vec{v}_2)$ pour tout $n \geq 1$.

(c) Soit $\vec{u} = 4\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$. Déterminer $f^n(\vec{u})$.

Diagonalisation

Test 3. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et soit $f = m_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(\vec{x}) = A.\vec{x}$.

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres correspondantes ?

(b) Determiner la matrice de f dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

(c) Déterminer P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(d) Soit D la matrice diagonale contenant les valeurs propres associées à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Vérifier qu'on a bien $D = P^{-1}AP$ (on peut calculer P^{-1} ou simplement vérifier que P est inversible et que $PD = AP$).

II Exercices

Dimension et rang

Exercice 1. Quelle est la dimension de l'espace $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$? Donner une base.

Exercice 2. Pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants, déterminer une base et sa dimension :

$$V_1 = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0;\ 2x - y + 4z = 0\}$$

$$V_2 = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\} \qquad V_3 = \{ \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid w + x + 2y + z = 0;\ w + x - y - z = 0\}$$

Exercice 3. Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer une base de l'image de A, et un système d'équations cartésiennes de l'image de A. Déterminer le rang de A et en déduire $\dim(\ker A)$.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants, et un système d'équations cartésiennes (on pourra utiliser l'exercice 3) :

$$F_1 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \quad F_2 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Exercice 5. Soient V_1 et V_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par les sytèmes d'équations cartésiennes suivants :

$$V_1 : \begin{cases} x & +4y & +z & -2w & = & 0 \\ -x & -4y & +z & -4w & = & 0 \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} & & z & -3w & = & 0 \\ x & +4y & & +w & = & 0 \end{cases}$$

Donner une représentation cartésienne de $V_1 \cap V_2$.
Déterminer une base de $V_1 \cap V_2$ et sa dimension.

Exercice 6 (Plus difficile)**.** Soit $V_1 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ et $V_2 = \mathrm{Vect}(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix})$.

Determiner une base de $V_1 \cap V_2$ et sa dimension.
Indication : on pourra commencer par trouver un système d'équations cartésiennes de V_1 et V_2.

Exercice 7. (a) Quels sont les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
(b) Quels sont les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^{11}$, on considère deux sous-espaces vectoriels F_1, F_2 avec $\dim F_1 = 3$ et $\dim F_2 = 6$.

(a) Quelles sont les dimensions possibles de $F_1 \cap F_2$ et de $F_1 + F_2$?
Pour chacune des dimensions, donner des exemples de F_1 et F_2 qui donnent le résultat.

(b) Même question avec $\dim F_1 = 5$ et $\dim F_2 = 9$.

Exercice 9. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que l'image d'une droite qui passe par l'origine est soit une droite, soit $\{0\}$

(b) Que peut-il se passer pour une droite ne passant pas par l'origine ?

(c) A l'aide de $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$, décrivez géométriquement l'image du carré unité (on pourra supposer que ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires).

Exercice 10 (Plus difficile)**.** (a) Construire une matrice dont l'image contient $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ et dont le noyau contient $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, ou sinon démontrer qu'une telle matrice n'existe pas.

(b) Même question pour une matrice dont l'image contient $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ et le noyau contient $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

Applications linéaires

Exercice 11. Soient les application suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$:

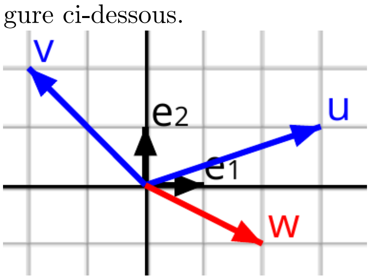
$$\text{(a) } f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}z\\x+2y\\x\end{bmatrix} \qquad \text{(b) } g(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}x+y\\y+2z\\2x+3\end{bmatrix} \qquad \text{(c) } h(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}x-y\\y+z\\xz\end{bmatrix}$$

(a) Montrer que f est linéaire

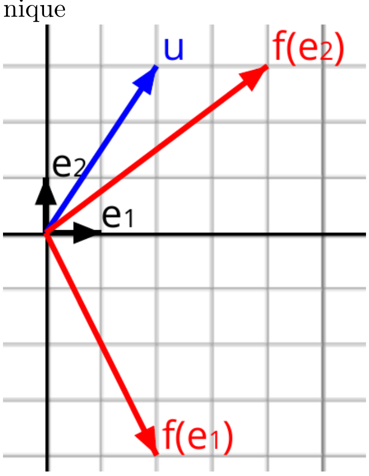
(b) Montrer que g et h ne sont pas linéaires.

Exercice 12. On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

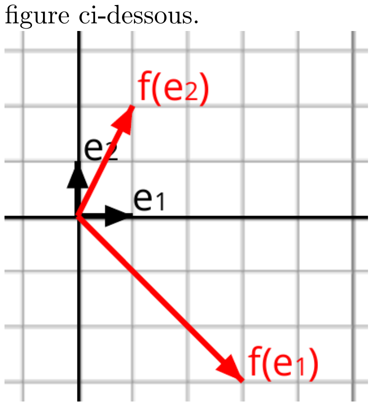
(a) Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer $f(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous. Déterminer la matrice de f dans la base canonique

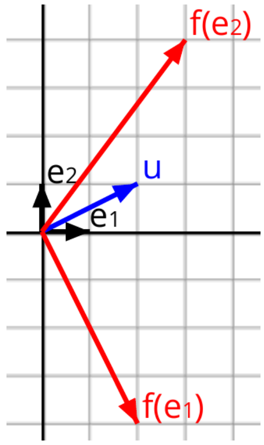


(c) Déterminer la matrice de f dans la base canonique avec la figure ci-dessous.

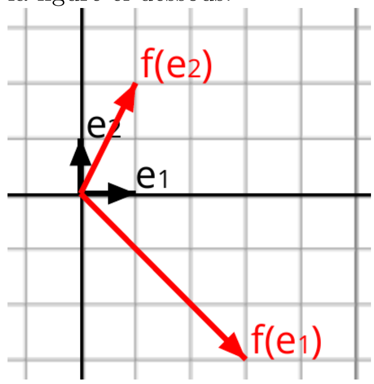


Exercice 13. On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

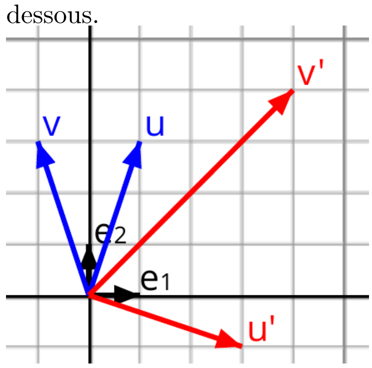
(a) Déterminer $f^{-1}(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique sur la figure ci-dessous.

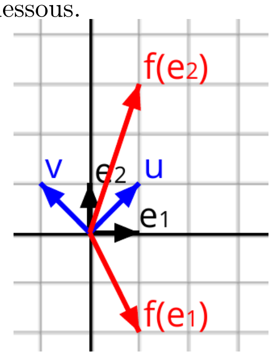


(c) Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{u}, \vec{v})$ à la base $(\vec{u}', \vec{v}')$ avec la figure ci-dessous.

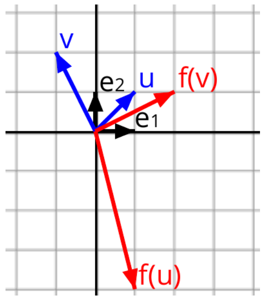


Exercice 14. On se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

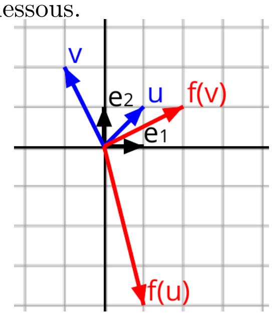
(a) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique sur la figure ci-dessous.



(c) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



Exercice 15. Soit A une matrice 3×4 qui vérifie

$$A \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $A.\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Applications linéaires en géométrie

Exercice 16. Déterminer la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtenue en faisant une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine suivie d'une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

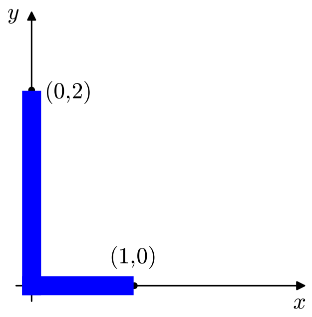
Exercice 17. On note par r_θ la rotation du plan autour de l'origine par un angle θ dans le sens positif. Expliquer pourquoi

$$r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}.$$

En calculant les matrices de rotations correspondantes, retrouver les formules trigonométriques pour $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$.

Exercice 18.

(a) Pour chacune des matrices ci-dessous, on considère l'application linéaire associée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dessiner l'effet de f sur la lettre L de la figure ci contre, puis donner une description géométrique de f.



$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Pour A_1, A_4 et A_5, dire si l'application correspondant est inversible et, le cas échéant, déterminer la matrice de l'application inverse et interprétez-la géométriquement.

Exercice 19. Soit M la matrice d'une rotation du plan d'angle $2\pi/3$. Sans calculer M, quelle est la matrice M^3 ? Déterminer la matrice M et vérifier votre réponse.

Exercice 20. Soient $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times A$.

Déterminer la matrice de f dans la base (M_1, M_2, M_3, M_4).

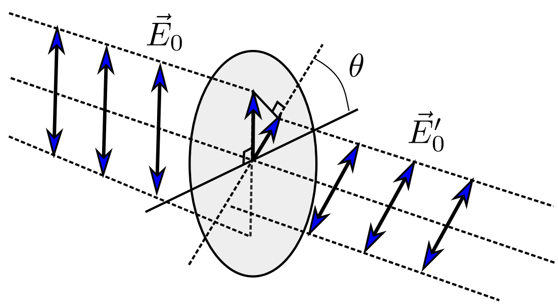
Polarisation

Exercice 21. Dans cet exercice, on ne considère que le cas (plus simple) de la polarisation rectiligne de la lumière. Dans ce cadre, un rayon lumineux correspond à un champ électrique variable dans le temps et l'espace de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}.\vec{x} - \omega t + \phi)$$

où $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ s'appelle le vecteur d'onde et donne la direction du rayon lumineux, et $\vec{E}_0$ est dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}$, $\omega, \phi \in \mathbb{R}$ sont la pulsation et la phase. Dans la suite on ne s'intéresse qu'au vecteur $\vec{E}_0$: la norme du vecteur E_0 correspond à l'intensité maximale du champ électrique, et sa direction s'appelle la direction de polarisation du rayon lumineux.

Lorsqu'on place un filtre polariseur sur le trajet du rayon (perpendiculairement à $\vec{k}$), le rayon sortant est décrit par un vecteur $\vec{E}_0'$ qui est la projection orthogonale de $\vec{E}_0$ sur l'axe du polariseur.



(a) Soit d_θ la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine et formant un angle θ avec $\vec{e}_1$. Soit p_θ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur d_θ. Déterminer la matrice P_θ de p_θ dans la base canonique. Que trouve-t-on pour $\theta = 0, \pi/2$ et $\pi/4$?

(b) Que se passe-t-il si on fait passer le rayon lumineux à travers un polariseur vertical puis horizontal (polariseurs croisés) ? Que vaut le produit de matrices $P_0 \cdot P_{\pi/2}$?

(c) On intercale entre le polariseur vertical et horizontal un polariseur d'angle $\pi/4$. Comment se calcule le champ électrique à la sortie en fonction du champ à l'entrée ? Si le champ électrique est vertical à l'entrée et d'amplitude 1V/m, quelle est l'amplitude du champ éléctrique à la sortie ?

(d) Que se passe-t-il si on met le polariseur oblique ($\pi/4$) après les deux polariseurs croisés ($0, \pi/2$) ?

Changement de base

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = \frac{3}{2}x$. Soient $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Déterminer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ et determiner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

(b) Déterminer la matrice de passage P entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, et son inverse.

(c) En déduire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 23. Soit $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, et $f = m_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à A.

(a) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et son inverse.

(b) Déterminer $f(\vec{v}_1)$ et $f(\vec{v}_2)$

(c) Quelles sont les coordonnées de $f(\vec{v}_1)$ et de $f(\vec{v}_2)$ dans la base $\mathcal{B}$?

(d) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de deux façons différentes

(e) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$g(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad g(\vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Déterminer la matrice de g dans la base canonique.

Déterminant

Exercice 24. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Utiliser la règle de Sarrus pour calculer le déterminant des matrices A et B.

(b) Calculer le déterminant de C en développant suivant la troisième ligne.

(c) Calculer le déterminant de D en développement suivant la deuxième colonne.

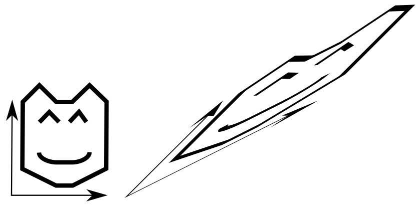
(d) Calculer le déterminant de E en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice 25. (a) Déterminer (sans calcul, ou presque) le déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 230 & 728 & 230 & 432 \\ 1301 & 315 & 1301 & 539 \\ 5\pi & 52 & 5\pi & 7\sqrt{2} \\ -22 & 45 & -22 & 18 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & \pi & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer le déterminant des matrices BC, C^2, C^{-1}, $2C$.

Exercice 26. La figure de gauche ci-contre mesure 3cm^2. Combien mesure son image par la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (à droite) ?



Exercice 27. Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation

Exercice 28. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ -15 & 14 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de A.

(b) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D t.q. $D = P^{-1}AP$.

(c) Déterminer explicitement P^{-1} et vérifier qu'on a bien $D = P^{-1}AP$. Vérifier votre résultat.

Exercice 29. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

autrement dit :

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.

(b) Déterminer les valeurs propres de A.

(c) Déterminer (une famille libre de) deux vecteurs propres de A (autrement dit, une base de vecteurs propres pour $\mathbb{R}^2$).

(d) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D tels que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 30. Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 31. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de l'exercice 30.

En utilisant la diagonalisation trouvée dans cet exercice, exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (^*)\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (^*)\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) : pour aller plus loin.

Applications

Exercice 33. Une multinationale a 4 milliards de dollars, répartis entre les Etats-Unis, l'Europe et la Chine. Au début, 2 milliards sont aux Etats-Unis, et 2 milliards en Europe.

Chaque année, la moitié des fonds américains restent en amérique, et l'autre moitié est répartie a parts égales entre Europe et Chine. Simultanément, la moitié des fonds chinois et européens reste sur place et l'autre moitié part aux États-Unis.

Quelle sera la distribution de ces fonds à la fin des temps ? Pour répondre à cette question, on pourra

(a) Ecrire la répartition des fonds l'année $n+1$ en fonction de l'année n sous la forme
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$
pour une certaine matrice A à déterminer.

(b) Diagonaliser A : déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et une base de vecteurs propres $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(c) Determiner $A^n \vec{v}_i$ pour chacun des vecteur $\vec{v}_i$, et determiner sa limite quand $n \to \infty$.

(d) Décomposer le vecteur représentant la répartition des fonds initiale dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(e) En déduire la réponse à la question initiale.

Exercice 34. Soit $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite récurrente définie par la relation
$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}, \qquad n \geq 1$$
et la condition initiale $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.

(a) Pour se familiariser avec cette suite, calculer u_2, u_3, u_4.

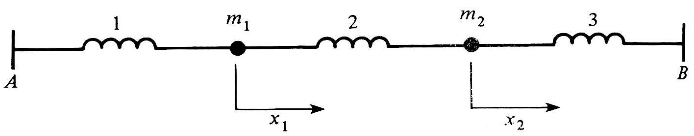
(b) On pose
$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad n \geq 0.$$
Montrer qu'on a
$$\vec{x}_{n+1} = A\, \vec{x}_n, \qquad n \geq 0,$$
où A est la matrice de l'exercice 31.

(c) Expliquer pourquoi on a $\vec{x}_n = A^n\, \vec{x}_0$, $n \geq 0$.

(d) Montrer, en utilisant les résultats de l'exercice 31 que $u_n = 2^{n+1} - 3^n$, $n \geq 0$.

(e) Utiliser cette formule pour calculer u_4 et comparer avec (a).

Exercice 35. On considère 2 masses m_1, m_2 reliées entre elles et à deux extrémités fixes par trois ressorts identiques de raideur k comme sur la figure ci-dessous.



On note x_1, x_2 la position des masses x_1, x_2 de sorte que lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les 3 ressorts sont détendus. A l'instant initial, les deux masses sont à leur position initiales $x_1(0) = x_2(0) = 0$, et que les deux vitesses initiales sont $x_1'(0) = 2$, $x_2'(0) = 0$ (la 2ème masse est a l'arrêt). On suppose que les seules forces s'exerçant sur les masses sont celles exercées par les ressorts.

(a) Montrer que x_1, x_2 vérifient le système d'équations différentielles suivant :
$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 x_1'' &= -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

(b) Ecrire ce système sous la forme $X'' = A.X$ avec $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ pour une matrice A à déterminer.

On prendra $k = 1$ et $m_1 = m_2 = 1$ dans des unités arbitraires.

(c) Déterminer les valeurs propres de A et déterminer une base de vecteurs propres correspondant $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

(d) Si on note $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$, déterminer le système d'équations différentielles satisfait par y_1, y_2.

(e) Déterminer la solution générale $y_1(t)$, $y_2(t)$ de ce système d'équations différentielles, puis déterminer la solution générale $x_1(t), x_2(t)$ du système initiale

(f) Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

III Exercices supplémentaires

Exercice 36. Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Si c'est le cas, déterminer une base et sa dimension :

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\} \qquad V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2\}$$
$$V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0, 2x - 5y + 2z = 0\} \qquad V_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 5y - z = 0\}$$

Exercice 37. Montrer que l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}^n$ et déterminer une base et sa dimension :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & -y & +2z & -2w & = & 0 \\ & y & -3z & -2w & = & 0 \\ -x & +2y & -4z & +w & = & 0 \\ & y & -4z & -3w & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice 38. Soient f la symétrie du plan par rapport à la droite Ox et g celle par rapport à la droite $y = x$.
Déterminer les matrices de f, g, et $g \circ f$ et montrer que $g \circ f$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Meme question avec $f \circ g$.

Exercice 39. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer un système d'équations cartésiennes de l'image de A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 40. Dire si les applications du plan suivantes sont linéaires :

$$\text{(a) } f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y \\ y + z \\ x + 2z \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y + z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c) } f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dire pour chacune de ces applications si elle est linéaire ou non.

Exercice 41. Soient $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2. Soit $f : E \to E$ qui a une matrice $A \in E$ associe $A \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de f dans la base (M_1, M_2, M_3, M_4).

Changement de base

Exercice 42. Soit $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$

(b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$g(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 + v_2 \quad \text{ et } \quad g(\vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2.$$

Déterminer la matrice de g dans la base canonique.

Déterminants

Exercice 43. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) en utilisant la règle de Sarrus ; (b) en développant suivant la première ligne ; (c) en développant suivant la deuxième colonne (d) en la transformant sous forme triangulaire.

Exercice 44. (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant une méthode de votre choix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer le déterminant de AB, C^2,

Diagonalisation

Exercice 45. Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 46. Soit A_2 la matrice de l'exercice 45 où on a trouvé des matrices P et D telles que $D = P^{-1}A_2P$.

(a) Expliquer pourquoi on a $A_2 = PDP^{-1}$.

(b) Expliquer pourquoi on a alors $A_2^n = PD^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Calculer A_2^n (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$). Vérifier votre formule pour $n = 4$.

IV Réponse aux tests et exercices supplémentaires

Réponses aux tests

Réponse au test 1. (a) $f(\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$

(b) $f(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 3 & -6\end{pmatrix} \times \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

(c) $f(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $f(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$, $f(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}$.

Réponse au test 2. $f^3(\vec{v}_1) = f(f(f(\vec{v}_1))) = f(f(2\vec{v}_1)) = f(2^2\vec{v}_1) = 2^3\vec{v}_1$. Plus généralement, $f^n(\vec{v}_1) = 2^n\vec{v}_1$ et $f^n(\vec{v}_2) = (-3)^n\vec{v}_2$ (ceci se démontre par récurrence puisque $f^{n+1}(\vec{v}) = f(f^n(\vec{v}))$). Puisque f^n est linéaire (car c'est une composition d'applications linéaires),

$$f^n(\vec{u}) = f^n(4\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2) = 4f^n(\vec{v}_1) - 5f^n(\vec{v}_2) = 4 \times 2^n\vec{v}_1 - 5 \times (-3)^n\vec{v}_2.$$

Réponse au test 3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Réponses aux exercices supplémentaires

Réponse à l'exercice 36. (a) V_1 : Oui. Base : $(-2,1,0)$, $(1,0,1)$. V_2 : non. V_3 : Oui. Base : $(4,2,1)$. V_4 : Non.

Réponse à l'exercice 37. On trouve comme base : $\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, c'est un espace de dimension 1.

Réponse à l'exercice 38. $M_f = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$, $M_g = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $M_{g\circ f} = M_g \circ M_f = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. On reconnait la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$. $M_{f\circ g} = M_f M_g = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

Réponse à l'exercice 39. Les 2 premières colonnes de A_1 forment une base de $\mathrm{Im}A_1$, correspondant aux 2 variables pivot. On a un système de 2 équations cartésiennes pour $\mathrm{Im}A_1$: $-2a + b + c = 0$, $-a + 3b + d = 0$.

Les colonnes 1 et 3 de A_2 forment une base de $\mathrm{Im}A_2$, correspondant aux 2 variables pivot. On a un système de 2 équations cartésiennes pour $\mathrm{Im}A_2$: $-4a + 3b + 2c = 0$, $-6a + 5b + 4d = 0$.

Réponse à l'exercice 40. (a) Oui. (b) Non. (c) Non.

Réponse à l'exercice 41. On trouve $M_f = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\2 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$

Réponse à l'exercice 42. (a) La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ -55 & -37 \end{pmatrix}$

(b) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sa matrice dans la base canonique est $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse à l'exercice 43. $\det A = -5$.

Réponse à l'exercice 44. $\det A = 1$; $\det B = 42$; $\det C = 3$; $\det D = 15$.

Réponse à l'exercice 45.

- A_1 : $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
- A_2 : $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Réponse à l'exercice 46.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+4^n & -2+2\cdot 4^n \\ -1+4^n & 1+2\cdot 4^n \end{pmatrix}$$

En prenant $n = 4$ on trouve

$$A^4 = \begin{pmatrix} 86 & 170 \\ 85 & 171 \end{pmatrix}$$

On vérifie par le calcul :

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 86 & 170 \\ 85 & 171 \end{pmatrix}$$