

Feuille d'exercices 2. Algèbre linéaire

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Test 1. Soit \mathcal{P} le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 2$. On a aussi une représentation paramétrique

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Est-ce que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à la question?

Trouver un point de \mathcal{P} . Trouver 2 autres points de \mathcal{P} de sorte que ces 3 points soient non alignés. Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à ces questions?

Test 2. Calculer la combinaison linéaire $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} 1 - t_1 - 2t_2 \\ 2 - t_1 - 3t_2 \\ 3 - t_1 - 4t_2 \end{bmatrix}$ sous la forme $\vec{u} + t_1\vec{v} + t_2\vec{w}$.

Test 3. Les matrices suivantes sont elles échelonnées?

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test 4. Les systèmes suivants sont ils échelonnées?

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ + 0 = 1 \\ + 0 = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ + y = 1 \\ + 0 = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ + z + t = 1 \\ + y = 2 \end{cases}$$

Test 5. Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ x - y - z \\ 2x - 3y + z \end{bmatrix}$ sous la forme $A \cdot \vec{v}$ pour une certaine matrice A et $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

II Exercices

Droites, plans, et systèmes linéaires

Exercice 1. (a) Ecrire sous forme paramétrique le plan de l'espace donné par l'équation

$$\mathcal{P} : \quad 2x - 3y + 4z = 6$$

En déduire un point et une paire de vecteurs directeurs de \mathcal{P} .

(b) Même questions pour le plan

$$\mathcal{P}' : \quad 2x - 3y + 4z = 0$$

Comparer avec la question précédente.

Exercice 2. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?
- (b) Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .
- (c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)

Exercice 3. (a) Déterminer l'intersection des deux plans suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : x + 2y - 3z &= 0 \\ \mathcal{P}_2 : 2x - y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

(b) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : x - y + 3z &= 1 \\ \mathcal{P}_2 : 2x + y - z &= 3 \\ \mathcal{P}_3 : x - 4y + 10z &= 1 \end{aligned}$$

(c) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 : 2x - 2y - z &= 2 \\ \mathcal{P}_2 : x + 2y + z &= 1 \\ \mathcal{P}_3 : x + 8y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Si l'intersection n'est pas vide, donner une description géométrique de l'intersection.

Systemes linéaires

Exercice 4. (a) Déterminer (sous forme paramétrique) l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x - 4y - z + w = 3 \\ 2x - 8y + z - 4w = 9 \\ -x + 4y - 2z + 5w = -6 \end{cases}$$

- (b) Quel est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant ?
- (c) Décrire l'ensemble des solutions du système initial comme somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions du système homogène.

(d) A quelle condition sur a, b, c le système de second membre $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ a-t-il une solution ?

Exercice 5. Pour les systèmes suivants, déterminer le nombre de solutions. Déterminer le nombre de solutions et le nombre de variables libres du système homogène associé.

$$(a) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 4y - 4z = -11 \end{cases}$$

Exercice 6. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

$$(a) \begin{cases} x + 2y - z + t = a \\ 2x + 7y + 4z + 2t = b \\ -x + 4y + 13z - t = c \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 3y = a \\ 3x - y = b \\ 2x + 2y = c \\ x - 4y = d \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases}$$

Exercice 7. Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit \mathcal{P} le sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par le paramétrage suivant :

$$\mathcal{P} = \{A + t_1\vec{u} + t_2\vec{v} | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

Déterminer un système d'équations cartésiennes de \mathcal{P} .

(b) Même question avec $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, et $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 8. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 2w = 0 \\ 2x + 4y + z + 2w = 2 \\ 3x + 5y - z + 6w = -1 \\ 2x - 7z + 10w = -10 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 4y + z + 2w = 4 \\ 2x + 6y + z + w = 0 \\ x + 3y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + 2w = 6 \\ 3x + 5y - z + 6w = 17 \\ 2x + 4y + z + 2w = 12 \\ 2x - 7z + 10w = 7 \end{cases}$$

Exercice 9. Alban, Béatrice et Cyril et Denise ont passé des examens de rhétorique, statistique, et thermodynamique. Tous les 4 connaissent leurs notes (sur 10) à chacune des épreuves. Alban et Béatrice connaissent leur total de points, mais pas Cyril ni Denise :

	Rhét	Stat	Thermo	Total
Alban	3	7	8	55
Béatrice	3	10	6	61
Cyril	3	4	10	??
Denise	6	5	6	??

Le total de points est calculé avec des coefficients r, s, t qu'ils ne connaissent pas (mais les mêmes pour tout le monde!). Par exemple, le total d'Alban est calculé par la formule $r \times 3 + s \times 7 + t \times 8$.

Peut-on savoir le total de points de Cyril et de Denise? Si oui, le déterminer (on ne demande pas les valeurs de r, s, t).

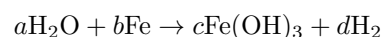
Système à paramètre

Exercice 10. Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + (a+4)y + (a+2)z = 4 \\ -x + (a-2)y + z = a-1 \end{cases}$$

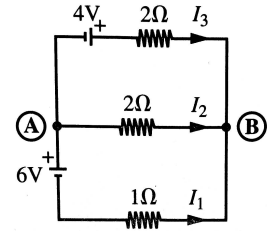
Applications

Exercice 11. Equilibrer la réaction chimique suivante :



Exercice 12. Trouver une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par les points $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Exercice 13. Déterminer l'intensité du courant I_1 , I_2 , I_3 passant par chacune des trois branches du circuit ci-contre.



Bases de \mathbb{R}^n

Exercice 14. Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Montrer que \vec{v}_1, \vec{v}_2 est une base du plan \mathbb{R}^2 et déterminer les coordonnées de \vec{u} par rapport à cette base.

Exercice 15. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de \mathbb{R}^3 . Si c'est le cas, déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dans cette base.

$$(a) \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

Exercice 16. Soient

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer, si possible, $2A$, $A - B$, $A + C$.

Exercice 17. Calculer le produit des matrices suivantes

$$(a) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si possible, AB , AC , CA , A^2 , C^2 .

Exercice 19. Démontrer ou donner un contreexemple à l'affirmation suivante.

Soit A une matrice $n \times p$ telle que pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$; alors tous les coefficients de A sont nuls.

Matrice inverse

Exercice 20. Soient A, B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que B est la matrice inverse de A .

Exercice 21. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles, et si c'est le cas, calculer leur inverse.

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1} .

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, avec $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Exercice 23. On considère le système

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & -1 \\ x & +2y & -z & = & 2 \\ 2x & +3y & -2z & = & 3 \end{cases}$$

(a) Résoudre le système en utilisant A^{-1} (voir exercice 20)

(b) Résoudre le système homogène correspondant :

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +3y & -2z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 24. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1} .

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, où $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs colonnes de A . En déduire les coordonnées de \vec{v} dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de \mathbb{R}^3 .

Exercice 25. On connaît l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ valable pour tous réels a, b . Supposons maintenant que A, B sont des matrices de taille $n \times n$.

Trouver A, B tq $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Quelle est la bonne formule pour $(A+B)^2$? A quelle condition sur A, B la formule $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est-elle valide?

Exercice 26. Soit A, B deux matrices $n \times n$. Supposons que AB soit inversible. En déduire que A et B sont inversibles.

Exercice 27. Soit A une matrice carrée $n \times n$ telle que $A^3 - 3A + 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible.
Indication : donner une formule pour son inverse!

Puissances d'une matrice (Optionnel)

Exercice 28. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Vérifier que $M^3 = M$, mais que $M^2 \neq I_3$ (où I_3 est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$).
 - (b) La matrice M est-elle inversible ?
 - (c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.
-

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Exercice 29. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- (a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?
 - (b) Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .
 - (c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)
-

Exercice 30. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer le nombre de solutions :

$$(a) \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = -4 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

Exercice 31. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z + 2w = 0 \\ x + 2y + 2z + 3w = 0 \\ 2x - 2z + 4w = 0 \\ x + 3y + z + 3w = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + 2y + 5z + 5w = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 6w = 0 \\ x + y + 2z + 3w = 0 \\ -x - y - z - 4w = 0 \end{cases}$$

Exercice 32. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

$$(a) \begin{cases} x + y - 3z = a \\ 3x - 2y - z = b \\ x - 2y - 2z = c \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y = a \\ x + z = b \\ 4x + y + 2z = c \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + y = a \\ x - 3y = b \\ -x + 4y = c \\ x - y = d \end{cases}$$

Exercice 33. Equilibrer la réaction chimique suivante :



Réponse. La plus petite solution entière est $(a, b, c, d, e) = (3, 6, 5, 1, 3)$.

Exercice 34. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de \mathbb{R}^3 :

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 35. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de \mathbb{R}^3 .

(b) Déterminer les coordonnées de \vec{w} par rapport à cette base.

Exercice 36. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer les coordonnées de \vec{w} par rapport à cette base.

Exercice 37. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si cela est possible, AB, BA, A^2, B^2 .

Exercice 38. Calculer les produits AB, BA, A^2, B^2 des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 39. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & +6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles et déterminer leur inverse le cas échéant.

Exercice 40. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer M^2 , M^3 , et M^4 ; comparer M^4 et M .
 (b) En déduire que la matrice M n'est pas inversible.
 (c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.
-

IV Réponse aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$ puisqu'il ne satisfait pas l'équation $2x - y + 3z = 2$. C'est la représentation cartésienne qui est utile.

La représentation paramétrique permet de construire facilement des points de \mathcal{P} . Par exemple, le point $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans \mathcal{P} (correspondant à $t_1 = t_2 = 0$). Si on fait $t_1 = 1, t_2 = 0$, on obtient un point

$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; et on obtient $C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en faisant $t_1 = 0, t_2 = 1$. Ces 3 points ne sont pas alignés puisque

\vec{AB} et \vec{AC} sont les 2 vecteurs $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

Réponse au test 2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4t_1 + 7t_2 \\ 2 + 5t_1 + 8t_2 \\ 3 + 6t_1 + 9t_2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 - t_1 - 2t_2 \\ 2 - t_1 - 3t_2 \\ 3 - t_1 - 4t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Réponse au test 3. (a) Non : la ligne de zéros n'est pas en bas. (b) Non, il y a un coef non nul sous le pivot de la 2e ligne. (c)(d) oui.

Réponse au test 4. (a),(b) oui. (c) non : le pivot de la 3eme ligne est à gauche du pivot de la 2eme ligne.

Réponse au test 5. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ x - y - z \\ 2x - 3y + z \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 29. (a) Il s'agit de savoir si le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'inconnues t_1, t_2 a une solution. Il n'en a pas donc $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$

(b) On trouve que le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a des solutions ssi $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$. \mathcal{P} a donc pour équation cartésienne $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$.

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est solution de $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$ donc appartient à \mathcal{P} .

Réponse à l'exercice 30. (a) une unique solution (b) Une infinité de solutions (1 variable libre)

Réponse à l'exercice 31. (a) $Sol = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ (b) $Sol = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Réponse à l'exercice 32. (a) Le système a toujours une (unique) solution.

(b) Le système a une solution si et seulement si $-a - 2b + c = 0$

(c) Le système a une solution si et seulement si $-a + 9b + 7c = 0$ et $-2a - 3b + 7d = 0$ (il y a d'autres écritures possible du résultat)

Réponse à l'exercice 34. 2 méthodes possibles : on peut échelonner la matrice et voir s'il y a des variables libres, ou calculer le déterminant. (a) Non. (b) Oui.

Réponse à l'exercice 35. (a) Lorsqu'on échelonne le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

il n'y a pas de variable libre, donc c'est une base.

(b) En résolvant ce système on trouve $\vec{w} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, donc les coordonnées cherchées sont $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 36. On trouve $\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ pour les coordonnées de \vec{w} .

Réponse à l'exercice 37. $BA = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

Réponse à l'exercice 38.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse à l'exercice 39. $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A_2 n'est pas inversible. $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A_4 n'est pas inversible.

Réponse à l'exercice 40. (a) On trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2M$$

(b) Si la matrice était inversible on pourrait déduire de $M^4 = 2M$ que $M^{-1}M^4 = 2M^{-1}M \iff M^3 = 2I_4$, (où I_4 est la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$), ce qui n'est pas le cas. Donc M n'est pas inversible.

(c) $M^5 = M^4M = 2MM = 2M^2$, $M^6 = M^4M^2 = 2M^3$, $M^7 = 2M^4 = 2^2M$. Plus généralement, comme $M^{4k} = (M^4)^k = 2^k I_4$, on écrit $n = 4k + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ (c'est la division euclidienne de n par 4, de reste r), et on obtient $M^n = M^{4k+r} = M^{4k}M^r = 2^k M^r$ et M^r est l'une des matrices I_4, M, M^2, M^3 selon la valeur de r .