

Feuille d'exercices 1. Développements limités

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Troncature

Test 1. Le formulaire donne la formule suivante :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9 \varepsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

- (a) En déduire un développement limité à l'ordre 5 de $\sin(x)$ quand $x \rightarrow 0$, et donner sa partie régulière.
- (b) Même question à l'ordre 4.

Test 2. Donner le développement limité d'ordre 2 en 0 du polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3$.

Test 3. Trouver un exemple de fonction f dont le développement limité à l'ordre 2 en 0 est

$$f(x) = 7 + 13x - 24x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

Substitution

Test 4. Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes

- (a) $-\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$, à l'ordre 3
- (b) $2 \cos(x)$ et $\cos(2x)$, à l'ordre 3

Test 5. Donner le développement limité en 0 de

- (a) $\sqrt[3]{1+3x}$ à l'ordre 2
- (b) $\sqrt[4]{1+x^2}$ à l'ordre 4

Test 6. Soit $f(x) = 1 + x - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$. Déterminer le développement limité à l'ordre maximum possible en 0 de $f(x^3)$.

Test 7. A l'aide de développements limités, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

II Exercices

Sommes et produits de développements limités

Exercice 1. Calculez le développement limité quand $x \rightarrow 0$ des fonctions suivantes :

- (a) $\sin(2x) - 2 \cos(x)$, à l'ordre 4
- (b) $(x + x^2)^2 + \cos(x)$, à l'ordre 3
- (c) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$, à l'ordre 2
- (d) $\frac{\ln(1+x)}{x}$, à l'ordre 3

Exercice 2. Calculez le développement limité à l'ordre 3 quand $x \rightarrow 0$ des fonctions suivantes :

- (a) $(1+x^2)^2 \cos x$
- (b) $e^x \sin(x)$
- (c) $\cos^2 x$
- (d) $e^{2x} \ln(1+x)$

Calculer les DL à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$ des fonctions suivantes (on peut utiliser les résultats précédents, mais attention au terme de reste!)

- (b') $\frac{e^x \sin(x)}{x}$
- (d') $\frac{e^{2x} \ln(1+x)}{x}$

Exercice 3 (Pour aller plus loin). Calculer le développement limité en 0 de $f(x) \cdot g(x)$ à l'ordre maximum possible, sachant que : $f(x) = x - x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = 2x + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Se ramener à des développements limités connus

Exercice 4 (Attention au piège). On veut calculer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$.

(a) Que va-t-on obtenir si on fait la substitution $u = 1 + x$ dans le développement limité de e^u en 0 ?

(b) En utilisant que $e^{a+b} = e^a e^b$, déterminer le développement limité de e^{1+x} à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 5 (Exercice important). Calculer les développements limités suivants à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$ en se ramenant à des DL connus :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \frac{1}{4+3x} & \text{(b)} & \frac{3}{x-2} & \text{(c)} & \sqrt{2+x} \\ \text{(d)} & \sqrt[3]{2+3x} & \text{(e)} & \ln(5+3x) & \text{(f)} & e^{3+2x} \end{array}$$

Composition de développements limités

Exercice 6. Calculez le développement limité à l'ordre 3 quand $x \rightarrow 0$ des fonctions suivantes :

$$\text{(a)} \quad \sin(\ln(1+x)) \qquad \text{(b)} \quad \ln(1+\sin(2x))$$

Exercice 7. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.

Exercice 8 (Attention au piège). Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$f(x) = e^{e^x}$$

Exercice 9. Calculez le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\text{(a)} \sqrt{e^x + \cos(x)} \qquad \text{(b)} \ln\left(\frac{e^x}{2} + \sin x\right)$$

Quotient de DL

Exercice 10. Déterminer le développement limité de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ à l'ordre 2 en calculant le développement limité de $\frac{1}{x+2}$ et en multipliant par $x+3$.

Exercice 11. Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$ des fonctions suivantes :

$$\text{(a)} \quad \frac{e^x}{\cos(x)} \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{1-\sin(x)} \qquad \text{(c)} \quad \frac{e^x}{\sqrt{1+2x}}$$

Exercice 12 (attention!). Calculez le développement limité à l'ordre 2 quand $x \rightarrow 0$ de

$$f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}.$$

Formules de Taylor-Young (complément)

Exercice 13. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité à l'ordre 4 quand $x \rightarrow 0$ de $(1+x)^\alpha$.

(b) En déduire le développement limité à l'ordre 3 quand $x \rightarrow 0$ de $\sqrt{1+x}$.

Exercice 14. Utiliser la formule de Taylor-Young en $\frac{\pi}{4}$ pour écrire le développement limité à l'ordre 2 quand $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ de $\sin(x)$.

Primitive d'un développement limité (complément)

Exercice 15.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 6 quand $x \rightarrow 0$ de la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(b) En se rappelant que la dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$, déduire un développement limité à l'ordre 7 quand $x \rightarrow 0$ de $\arctan(x)$

Limites en 0

Exercice 16. À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes. Vous pouvez aussi utiliser la règle de l'Hôpital.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x + x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + x^3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)x \sin(x)}{\tan(x) - x}$$

Exercice 17. Utiliser les développements limités pour calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1 - 3x}} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^2 + x^3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)}$$

Exercice 18 (Pour aller plus loin).

- (a) Calculez le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{x} \ln(1+x)$.
 (b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
 (c) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Droite tangente, position de la courbe relativement à la tangente, extremum

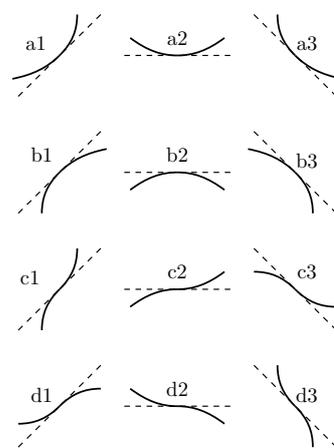
Exercice 19. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité, déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum local.

$$f_1(x) = \sin(2x) - 2\cos(x) = -2 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad f_2(x) = \ln(1+x) + e^x = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$f_3(x) = \sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

Exercice 20. Soit $f(x)$ une fonction dont le développement limité en 0 est indiqué ci-dessous. Dans chacun des cas, déterminer l'allure du graphe de la fonction $f(x)$ au voisinage de $x = 0$ parmi les 12 graphiques ci-contre.

- (a) $f(x) = -1 + 4x - 3x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (b) $f(x) = 1 - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (c) $f(x) = -x - x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (d) $f(x) = x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (e) $f(x) = 1 - 2x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (f) $f(x) = 2 + 4x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (g) $f(x) = 2 + 4x - x^3 + x^3\varepsilon(x)$
 (h) $f(x) = 2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$



(i) Donner des exemples de DL correspondants aux figures a1, c1, b3 et d2.

Asymptotes en ∞ (optionnel)

Exercice 21. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - x + 1}$$

- Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \rightarrow 0$, $h > 0$.
- En posant $h = \frac{1}{x}$, en déduire l'équation de la droite asymptote au graphe de f en $+\infty$.
- Quelle est la position du graphe de f par rapport à l'asymptote ?

Exercice 22. Soit $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. En étudiant $hf(\frac{1}{h})$ lorsque $h \rightarrow 0$, trouver l'équation de la droite asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$, et déterminer la position du graphe de f par rapport à l'asymptote.

Exercice 23. Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + 1}$

- (a) Déterminer le développement limité en à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$ quand $h \rightarrow 0$ par valeurs positives.
- (b) En déduire l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$.
- (c) Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette asymptote.
- (d) Mêmes questions en $-\infty$.

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Sommets, produits, quotients, compositions

Exercice 24. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

- (a) $\ln(1+x) + e^x$, à l'ordre 3
- (b) $e^x + e^{-x}$, à l'ordre 3
- (c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, à l'ordre 3

Exercice 25. Calculer le développement limité de $f(x) + g(x)$ à l'ordre maximum possible au voisinage de 0, sachant que : $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $g(x) = 1 - 3x + 2x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

Exercice 26. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

- (a) $(e^x - e^{-x}) \sin(x)$, à l'ordre 3
- (b) $\sin(x) \cos(x)$, à l'ordre 3
- (c) $\sin^2(x)$, à l'ordre 4

Exercice 27. Calculez le développement limité en 0 des fonctions suivantes :

- (a) $(1 + 2x - 2x^2)^{1/2}$, à l'ordre 2
- (b) $\sin(\sin(3x))$, à l'ordre 3
- (c) $\sqrt{\cos(x)}$, à l'ordre 2
- (d) $e^{\sqrt{1+x}}$, à l'ordre 2

Limites, tangentes, et asymptotes

Exercice 28. À l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x^2} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\cos(x) - 1}$$

Exercice 29. Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sin^2(x)} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{\sin(x)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan x - 3x}{x^3 + x^2}$$

Exercice 30. Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité, déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum.

$$f_1(x) = \sqrt{1+2x-2x^2} = 1+x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad f_2(x) = \sin(x)(e^x - e^{-x}) = 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$f_3(x) = 3 \tan x - 3x = x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad f_4(x) = 1 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 31. (a) Utiliser la formule de Taylor-Young pour écrire le développement limité d'ordre 2 en 1 de $f(x) = \arctan(x)$.

- (b) En déduire une équation de la droite tangente en 1 à la courbe de f ainsi que la position relative de la courbe et la tangente.

Exercice 32. Soit $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

En calculant un développement limité à l'ordre 2 de $f(\frac{1}{h})$ quand $h \rightarrow 0$, déterminer l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$, et la position du graphe de f par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

(Complément) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

Exercice 33. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$

- (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $hf(\frac{1}{h})$.
- (b) Dédurre l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et la position relative de la courbe de f et l'asymptote.
- (c) Même questions en $-\infty$.

IV Réponses aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. (a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0$

(b) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon_3(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$

Réponse au test 2. $P(x) = -3 + 5x^2 + x^2(-2x + x^2) = -3 + 5x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Réponse au test 3. On peut tout simplement prendre $f(x) = 7 + 13x - 24x^2$.

Réponse au test 4.

(a) $-\ln(1+x) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Le DL de $\ln(1+u)$ avec $u = -x$ donne $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

(b) $2\cos(x) = 2 - x^2 + x^3\varepsilon(x)$.

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + x^3\varepsilon(x)$.

Réponse au test 5. (a) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = 1/3$ et $u = 3x$. On trouve $1 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(b) Utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ (l'ordre 2 suffit !) avec $\alpha = 1/4$ et $u = x^2$. On trouve $1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{32}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Réponse au test 6. $f(x^3) = 1 + (x^3) - (x^3)^2 + (x^3)^2\varepsilon(x^3) = 1 + x^3 - x^6 + x^6\varepsilon_1(x)$.

Réponse au test 7. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - x^2/2 + x^2\varepsilon_1(x)}{x + x^2\varepsilon_2(x)} = \frac{\cancel{x}(1 - x/2 + x\varepsilon_1(x))}{\cancel{x}(1 + x\varepsilon_2(x))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$

Réponse à l'exercice 24. (a) $\ln(1+x) + e^x = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. (b) $e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + x^3\varepsilon(x)$.

(c) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 25. On ne connaît que le DL à l'ordre 2 de g en 0, donc on ne peut déterminer que le DL à l'ordre 2 de $f+g$. On a $f(x) = 2 + x - x^2 + x^2\varepsilon_3(x)$, donc $(f+g)(x) = 3 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon_4(x)$.

Réponse à l'exercice 26. (a) $(e^x - e^{-x})\sin(x) = 2x^2 + x^3\varepsilon(x)$. (b) $\sin(x)\cos(x) = (x - \frac{1}{6}x^3)(1 - \frac{1}{2}x^2) + x^3\varepsilon(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$. (c) $\sin^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 27. (a) $\sqrt{1+2x-2x^2} = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ (b) $\sin(\sin(3x)) = 3x - 9x^3 + x^3\varepsilon(x)$

(c) $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$. (d) $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{e}{2}x + x^2\varepsilon(x)$.

Réponse à l'exercice 28. (a) $+\infty$. (b) 1

Réponse à l'exercice 29. (a) $\frac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2(\frac{3}{2} + \varepsilon(x))}{x^2(1 + \varepsilon(x))} \rightarrow \frac{3}{2}$

(b) $\frac{e^{\sin(x)} - \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{x(1 + \varepsilon_1(x))}{x(1 + \varepsilon_2(x))} = \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_2(x)} \rightarrow 1$.

(c) $\frac{3\tan x - 3x}{x^3 + x^2} = \frac{x^3(1 + \varepsilon(x))}{x^2(1+x)} = x \frac{1 + \varepsilon(x)}{1+x} \rightarrow 0$.

Réponse à l'exercice 30. *Avertissement.* On ne connaît que le comportement de $\varepsilon(x)$ proche de 0, donc on peut étudier la position relative de la courbe et de sa tangente que proche de 0.

(a) équation de la tangente : $y_1 = 1 + x$; la courbe est en dessous de y_1 proche de 0.

(b) équation de la tangente : $y_2 = 0$; la courbe est au-dessus ; on a un minimum local en 0.

(c) équation de la tangente : $y_3 = 0$; la courbe est au-dessus de la tangente si $x > 0$ et en dessous si $x < 0$ (proche de 0) ; ce n'est pas un extremum.

(d) équation de la tangente : $y_4 = 1$; la courbe est en dessous ; on a un maximum local en 0.

Réponse à l'exercice 31. $\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$. La courbe est en dessous de sa tangente au voisinage de 1.

Réponse à l'exercice 32. $f(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h} \ln(1+h) = \frac{1}{h}(h - \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)) = 1 - \frac{1}{2}h + h\varepsilon(h)$, où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Donc en posant $h = \frac{1}{x}$, on a $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$, où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. De plus, $f(x) - 1 = \frac{1}{x}(-\frac{1}{2} + \varepsilon(\frac{1}{x})) < 0$ pour x suffisamment grand.

On en déduit que $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{f(x)} \rightarrow e^1 = e$.

Réponse à l'exercice 33. (a) $hf(1/h) = 1 + 2h - h^2 + \frac{1}{h^2}\varepsilon(h)$.

(b) $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. $y = x + 2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

(c) Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Donc $f(x) = -x - 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$. $y = -x - 2$ est asymptote et la courbe est encore en-dessous de l'asymptote.