Dérivation arithmétique

Marie CALCAGNO

Université de Rennes
Professeur encadrant : Bernard LE STUM

2020-2021

Joyal - années 1980
Buium - années 2000
Bhatt, Scholze - depuis 2017

1. δ-structures
2. Travaux de Buium

Soit A un anneau commutatif unitaire et soit p un nombre premier.

Définition

Un vecteur de Witt *à coefficients dans A est une suite infinie de la forme $(f_0, \ldots, f_m, \ldots)$ avec $f_0, \ldots, f_m, \ldots \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le* n-ième polynôme de Witt *est :*

$$W_n(f_0, \ldots, f_m, \ldots) = f_0^{p^n} + pf_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n f_n.$$

Nous allons nous intéresser au cas où $n = 1$. Nous avons alors $W_1(f, g) = f^p + pg$ pour $f, g \in A$.

Définition

L'anneau des vecteurs de Witt (de type p) de longueur 2 sur l'anneau commutatif A est $W_1(A) = A \times A$ muni des lois suivantes : pour $f, g, f', g' \in A$,

- $(f, g) + (f', g') = \left(f + f', g + g' - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{k} f^{p-k} f'^k \right)$,
- $(f, g) \times (f', g') = (ff', f^p g' + g f'^p + pgg')$.

L'élément neutre pour l'addition (resp. la multiplication) est $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$).

Définition

Une p-dérivation *est une application* $\delta : A \to A$ *telle que :*

1. $\delta(0) = \delta(1) = 0$,
2. $\forall f, g \in A, \delta(f+g) = \delta(f) + \delta(g) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{k} f^{p-k} g^k$,
3. $\forall f, g \in A, \delta(fg) = f^p \delta(g) + \delta(f) g^p + p\delta(f)\delta(g)$.

Définition

Une δ-structure *est une section de* W_0 *:*

$$\begin{aligned} A &\to W_1(A) . \\ f &\mapsto (f, \delta(f)) \end{aligned}$$

Définition

Un δ-anneau *est un anneau commutatif doté d'une* δ*-structure. Autrement dit, c'est un couple* (A, δ) *composé d'un anneau commutatif* A *et d'une p-dérivation* $\delta : A \to A$. *Si le contexte est clair, on peut seulement noter* A *au lieu de* (A, δ). *Un* δ-sous-anneau *d'un* δ*-anneau* A *est un sous-anneau* B *de* A *tel que* $\delta B \subset B$.

Définition

Un morphisme de δ-anneaux *est un morphisme d'anneaux qui préserve* δ.

On obtient la catégorie $\underline{\delta A}$ des δ-anneaux.

Définition

Soit R un δ-anneau fixé. Un δ-anneau sur R *est un δ-anneau A muni d'un morphisme de δ-anneaux $R \to A$. Un* morphisme de δ-anneaux sur R *est un morphisme de δ-anneaux qui est un morphisme de R-algèbres. On obtient la catégorie $\underline{R_\delta}$ des δ-anneaux sur R.*

Proposition

Soit R un δ-anneau fixé et soit A un δ-anneau sur R. Notons f_i pour $i \in E$ les générateurs de A sur R. Une δ-structure sur A est déterminée de manière unique par l'action de δ sur les f_i.

Définition

Un Frobenius *sur A est un endomorphisme ϕ de A qui vérifie :*

$$\forall f \in A, \phi(f) \equiv f^p \mod p.$$

Proposition

Soit A un δ-anneau. L'application

$$\begin{aligned} \phi : A \to & \quad A \\ f \mapsto & \; f^p + p\delta(f) \end{aligned}$$

*est un Frobenius sur A. On l'appelle l'*endomorphisme de Frobenius *de A.*

Proposition

On suppose que A est un anneau sans p-torsion. Soit ϕ un endomorphisme de A. On suppose que ϕ est un Frobenius sur A. En posant :

$$\delta(f) = \frac{\phi(f) - f^p}{p}$$

pour tout $f \in A$, on obtient une structure de δ-anneau sur A.

Exemples

- Il existe une unique δ-structure sur $\mathbb{Z}$. Elle est donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \delta(n) = \frac{n - n^p}{p}.$$
- Il existe une unique δ-structure sur $\mathbb{Z}[X]$ pour laquelle $\delta(X) = f$ (où $f \in \mathbb{Z}[X]$).
- Il existe une unique δ-structure sur $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_m, \ldots]$ pour laquelle $\delta(X_m) = X_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- Lorsque $p = 2$, l'anneau des entiers de Gauss $A = \mathbb{Z}[i]$ ne possède pas de δ-structure.
- Si $R = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ avec $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et A est une R-algèbre, alors A possède une δ-structure si et seulement si $A = \{0\}$.

Travaux de Buium (années 2000)

A anneau commutatif unitaire.

Définition

Une application $\delta : A \to A$ est appelée un opérateur *sur A s'il existe deux polynômes S, P dans $A[X_0, X_1, Y_0, Y_1]$ tels que pour tous $x, y \in A$ on a :*

$$\delta(x+y) = S(x, y, \delta(x), \delta(y)),$$

$$\delta(xy) = P(x, y, \delta(x), \delta(y)).$$

Dans ce cas, on dit que δ et le couple (S, P) correspondent l'un à l'autre.

Exemples d'opérateurs (1/3)

- L'**opérateur de différence** :
  Il s'agit d'une application $\delta : A \to A$ qui vérifie
  $$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y),$$
  $$\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x) + \delta(x)\delta(y) \text{ et } \delta(1) = 0$$
  pour tous $x, y \in A$.
  Le couple $(X_1 + Y_1, X_0 Y_1 + Y_0 X_1 + X_1 Y_1)$ correspond à δ.
- La **dérivation** :
  C'est une application $\delta : A \to A$ qui satisfait
  $$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \text{ et } \delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$$
  pour tous $x, y \in A$.
  Le couple $(X_1 + Y_1, X_0 Y_1 + Y_0 X_1)$ correspond à δ.

Exemples d'opérateurs (2/3)

- L'**opérateur de π-différence** :
  Soit π un élément non inversible de A. Un opérateur de π-différence est une application $\delta : A \to A$ qui vérifie

  $$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) \text{ et } \delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x) + \pi\delta(x)\delta(y)$$

  pour tous $x, y \in A$
  Le couple $(X_1 + Y_1, X_0 Y_1 + Y_0 X_1 + \pi X_1 Y_1)$ correspond à δ.

Exemples d'opérateurs (3/3)

- La π-**dérivation** :
  Soit π un élément non inversible de A. On suppose qu'il existe un élément $\pi^* \in A$ tel que $\pi\pi^* = p$ où p est un entier premier. Soit $q \neq 1$ une puissance de p. On considère le polynôme à coefficients entiers

$$C_q(X, Y) = \frac{X^q + Y^q - (X+Y)^q}{p}.$$

Une π-dérivation est une application $\delta : A \to A$ qui satisfait

$$\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \pi^* C_q(x, y),$$
$$\delta(xy) = x^q\delta(y) + y^q\delta(x) + \pi\delta(x)\delta(y).$$

pour tous $x, y \in A$. Le couple

$$(X_1 + Y_1 + \pi^* C_q(X_0, Y_0), X_0^q Y_1 + Y_0^q X_1 + \pi X_1 Y_1)$$

correspond à δ.

Définition

1. *Soit δ un opérateur sur A. On dit que δ est* générique *sur A si, pour tout polynôme $F \in A[X_0, X_1]$ vérifiant $F(x, \delta(x)) = 0$ pour tout $x \in A$, on a $F = 0$.*
2. *Soit δ un opérateur sur A. Une* extension générique *de δ est un opérateur $\tilde{\delta}$ sur une extension d'anneau $\tilde{A}$ de A tel que : $\tilde{\delta}$ coïncide avec δ sur A, il existe un couple (S, P) qui correspond à δ et $\tilde{\delta}$, et $\tilde{\delta}$ est générique sur $\tilde{A}$.*
3. *Un opérateur δ sur A est appelé un* opérateur de jet *si $\delta(0) = \delta(1) = 0$ et s'il admet une extension générique.*
4. *Deux opérateurs δ_1 et δ_2 sur A sont dits* équivalents *s'il existe un élément inversible $\lambda \in A^\times$ et un polynôme $f \in A[X]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et :*

$$\forall x \in A, \delta_1(x) = \lambda\delta_2(x) + f(x).$$

Proposition

Soient δ_1 et δ_2 deux opérateurs équivalents sur A. Alors δ_1 est un opérateur de jet si et seulement si δ_2 en est un.

Proposition

Si A n'a pas d'idempotents non triviaux et si π n'est pas un diviseur de 0, alors l'opérateur de différence, la dérivation, l'opérateur de π-différence et la π-dérivation sont des opérateurs de jet.

Théorème de classification de Buium

Théorème

On suppose que A est un anneau local intègre de caractéristique 0. Tout opérateur de jet sur A est équivalent à l'un des opérateurs suivants : un opérateur de différence, un opérateur de dérivation, un opérateur de π-différence, ou un opérateur de π-dérivation.

Lemme

Soit A un anneau. On suppose que $\delta : A \to A$ est un opérateur et $\tilde{\delta} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ une extension générique de δ. Alors il existe un unique couple (S, P) qui correspond à δ et $\tilde{\delta}$.

Lemme

Soit A un anneau. On suppose que $\delta : A \to A$ est un opérateur et $\tilde{\delta} : \tilde{A} \to \tilde{A}$ une extension générique de δ. Soit (S, P) l'unique couple qui correspond à δ et $\tilde{\delta}$. Pour toute A-algèbre B, les formules

$$(x_0, x_1) + (y_0, y_1) = (x_0 + y_0, S(x_0, y_0, x_1, y_1)),$$

$$(x_0, x_1).(y_0, y_1) = (x_0 y_0, P(x_0, y_0, x_1, y_1)),$$

définissent une structure d'anneau sur $B \times B$ telle que l'élément neutre pour l'addition soit $(0, 0)$ et l'élément neutre pour la multiplication soit $(1, 0)$.

- Notons $\Sigma(A)$ l'ensemble de tous les couples (S, P) de $A[X_0, X_1, Y_0, Y_1]$ tels que les deux formules du lemme précédent définissent, pour toute A-algèbre B, une structure d'anneau sur $B \times B$ dont l'élément neutre pour l'addition (resp. la multiplication) est $(0, 0)$ (resp. $(1, 0)$).
- Notons $\Gamma(A)$ le groupe $A^{\times} \times X(X-1)A[X]$ muni du produit semi-direct $(\lambda_1, f_1).(\lambda_2, f_2) = (\lambda_1\lambda_2, f_1 + \lambda_1 f_2)$.

Le groupe $\Gamma(A)$ agit sur $\Sigma(A)$, l'action est donnée par

$$(\lambda, f).(S, P) = (S', P')$$

pour $(\lambda, f) \in \Gamma(A), (S, P) \in \Sigma(A)$ avec

$$S' = \lambda S\left(X_0, \lambda^{-1}(X_1 - f(X_0)), Y_0, \lambda^{-1}(Y_1 - f(Y_0))\right) + f(X_0 + Y_0),$$

$$P' = \lambda P\left(X_0, \lambda^{-1}(X_1 - f(X_0)), Y_0, \lambda^{-1}(Y_1 - f(Y_0))\right) + f(X_0 Y_0).$$

Proposition

On suppose que A est un anneau local intègre de caractéristique 0. Tout élément de $\Sigma(A)$ appartient à l'orbite sous l'action de $\Gamma(A)$ de l'un des quatre couples (S, P) suivants :

$$S = X_1 + Y_1, P = X_0 Y_1 + Y_0 X_1 + X_1 Y_1,$$
$$S = X_1 + Y_1, P = X_0 Y_1 + Y_0 X_1,$$
$$S = X_1 + Y_1, P = X_0 Y_1 + Y_0 X_1 + \pi X_1 Y_1,$$
$$S = X_1 + Y_1 + \pi^* C_q(X_0, Y_0), P = X_0^q Y_1 + Y_0^q X_1 + \pi X_1 Y_1,$$

où π, π^* et q sont définis comme précédemment.

Lemme

On suppose que A est un anneau local intègre de caractéristique 0, notons K son corps des fractions. Tout élément de $\Sigma(K)$ appartient à l'orbite sous l'action de $\Gamma(K)$ de l'un des deux couples (S, P) suivants :

$$S = X_1 + Y_1, P = X_0 Y_1 + Y_0 X_1 + X_1 Y_1,$$
$$S = X_1 + Y_1, P = X_0 Y_1 + Y_0 X_1.$$

Références

[B1] *Arithmetic Analogues of Derivations* d'Alexandru BUIUM, 31 janvier 1997.
[B2] *Arithmetic Differential Equations* d'Alexandru BUIUM, American Mathematical Society, 2005.
[BS] *Prisms and prismatic cohomology* de Bhargav BHATT et Peter SCHOLZE, 27 août 2019.
[J1] *δ-anneaux et λ-anneaux* d'André JOYAL, 4 août 1985.
[J2] *δ-anneaux et vecteurs de Witt* d'André JOYAL, juin 1985.
[LS] *Twisted differential operators and q-crystal* de Michel GROS, Bernard LE STUM et Adolfo QUIROS, versions du 29 avril 2020 et du 17 décembre 2020.
[Bo] Conférence sur le sujet *Introduction to Witt vectors, delta-rings, and prisms* de James BORGER, septembre 2019, disponible à l'adresse Internet suivante :
https ://www.youtube.com/watch ?v=_ y2Tcu-iJV4