UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Corrigé du devoir

Exercice 1

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (N'oubliez pas de démontrer les réponses !)

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$

C'est faux. Démontrons la négation de cette propriété, i.e.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x + y < z.$$

Posons $x := 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $z := y + 1$. On a alors $x + y = 0 + y = y < z$ donc $x + y < z$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geqslant z$

C'est vrai. En effet, soient $x, z \in \mathbb{R}$. Posons $y := z - x$. On a alors $x + y = z$ donc $x + y \geqslant z$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = z^2$

C'est faux. En effet, la négation de cette propriété est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq z^2.$$

Posons $x := 1$ et $z := 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a alors $x^2 + y^2 = 1 + y^2 \geqslant 1$ car le carré d'un nombre réel est positif ou nul, donc $x^2 + y^2 \neq 0 = z^2$, ce qui démontre la négation.

(d) $\forall x \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, \exists y \in \mathbb{C}, x^2 + y^2 = z^2$

C'est vrai. En effet, soient $x, y \in \mathbb{C}$. On peut écrire le nombre $z^2 - x^2 \in \mathbb{C}$ sous forme exponentielle : il existe $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z^2 - x^2 = re^{i\theta}$. Posons $y := \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$. On a alors $y^2 = re^{i\theta} = z^2 - x^2$ donc $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on exprimera toutes les réponses sous forme algébrique. On considère l'application

$$f : \mathbb{C}\ \{i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{iz}{z-i}.$$

(a) Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(1+i)$.

On a

$$f(1) = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$
$$f(-1) = \frac{-i}{-1-i} = \frac{-i(-1+i)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2},$$

et

$$f(1+i) = i(1+i) = -1+i.$$

(b) Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$ que l'on déterminera tel que $f(z) = 2$.

Il s'agit de résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}\ \{i\}, \quad \frac{iz}{z-i} = 2.$$

On procède alors par équivalences

$$\frac{iz}{z-i} = 2 \Leftrightarrow iz = 2(z-i) \Leftrightarrow z(2-i) = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{2-i}.$$

La solution est donc

$$z = \frac{2i}{2-i} = \frac{2i(2+i)}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{4i}{5}.$$

(c) Montrer qu'il existe exactement deux $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$ que l'on déterminera tels que $f(z) = z$.

Il s'agit de résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}\ \{i\}, \quad \frac{iz}{z-i} = z.$$

On procède de nouveau par équivalence :

$$\frac{iz}{z-i} = z \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{i}{z-i} = 1. \end{array} \right.$$

La seconde condition s'écrit encore $i = z - i$ et on trouve donc les solutions $z = 0$ ainsi que $z = 2i$.

(d) i. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \{i\}, \quad f(z) - i = \frac{-1}{z-i}.$$

En effet, si $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$, on a

$$f(z) - i = \frac{iz}{z-i} - i = \frac{iz - i(z-i)}{z-i} = \frac{-1}{z-i}.$$

ii. En déduire que si un point M d'affixe $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$ est sur le cercle de centre A d'affixe i et de rayon 1, alors le point M' d'affixe $f(z)$ s'y trouve aussi.

En effet, si on suppose que $|z-i| = 1$, on aura alors

$$|f(z) - i| = \left|\frac{-1}{z-i}\right| = \frac{1}{|z-i|} = 1.$$

(e) i. Montrer la suite d'équivalences

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \{i\}, \quad f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

En effet, si $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$, on a

$$\overline{f(z)} = \frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+i}$$

si bien que

$$f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow \frac{iz}{z-i} = \frac{-i\overline{z}}{\overline{z}+i} \Leftrightarrow iz(\overline{z}+i) = -i\overline{z}(z-i)$$

$$\Leftrightarrow 2i|z|^2 = z - \overline{z} \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z).$$

De la même façon, on voit que

$$\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|z - \frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(z - \frac{i}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{i}{2}(z - \overline{z}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z).$$

ii. En déduire que les points M d'affixe $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ forment un cercle $\mathcal{C}$ privé d'un point dont on donnera l'affixe du centre Ω ainsi que le rayon.

La condition $f(z) \in \mathbb{R}$ s'écrit encore $f(z) = \overline{f(z)}$ et celle-ci est équivalente à $|z - i/2| = 1/2$. On trouve donc le cercle de rayon $1/2$ dont le centre Ω a pour affixe $i/2$.

(f) Pour $z \in \mathbb{C}\ \{i\}$, on pose $z = x + iy$ et $f(z) = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Exprimez x' et y' en fonction de x et de y.

On aura

$$f(z) = \frac{i(x+iy)}{x+iy-i} = \frac{i(x+iy)(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{-x+i(x^2+y^2-y)}{x^2+(y-1)^2}$$

si bien que

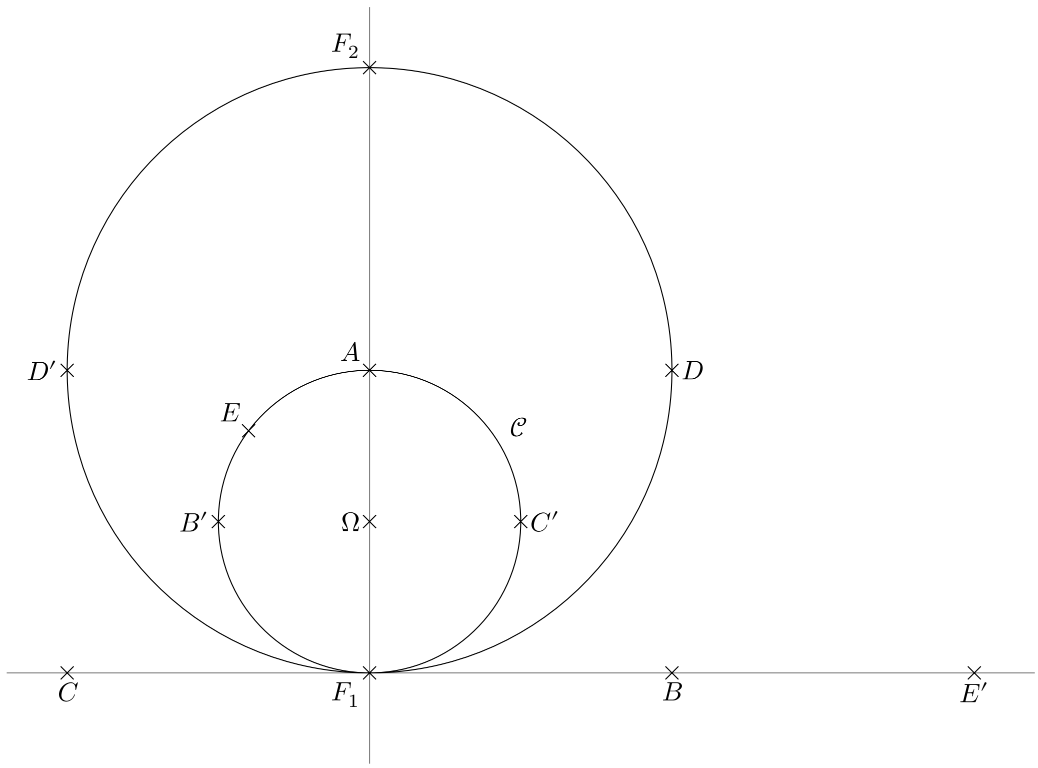
$$x' = \frac{-x}{x^2+(y-1)^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2}.$$

(g) Retrouver le résultat de la question (e)) ii.) à l'aune de la question (f)).

La condition $f(z) \in \mathbb{R}$ s'écrit encore $y' = 0$, c'est à dire $x^2 + y^2 - y = 0$. Une fois complété le carré, on obtient l'équation $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$. On retrouve donc bien le cercle de centre Ω et de rayon $1/2$.

(h) Représenter sur un même graphique à l'échelle $1 = 4$ cm :

i. les points B, C, D d'affixes $1, -1, 1+i$ ainsi que les points B', C', D' d'affixes $f(1), f(-1), f(1+i)$,
ii. le point E' d'affixe 2 ainsi que le point E dont l'affixe est l'antécédent de 2 par f,
iii. les deux points F_1 et F_2 dont l'affixe satisfait $f(z) = z$,
iv. le point A ainsi que cercle de centre A et de rayon 1,
v. le cercle $\mathcal{C}$ ainsi que son centre Ω.



Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ le plan. Un point de $\mathcal{P}$ est représenté par un couple de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Soit Δ une droite de $\mathcal{P}$, M un point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas sur Δ et Δ_∞ la droite parallèle à Δ qui passe par M. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M distincte de Δ_∞. Montrer qu'il existe un unique point N de Δ tel que $(MN) = \mathcal{D}$ et caractériser N géométriquement.

Montrons que les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont sécantes. Si elles étaient parallèles, comme $M \in \mathcal{D}$, les droites $\mathcal{D}$ et Δ_∞ seraient deux droites parallèles à Δ qui passent par M, donc elles seraient confondues. Or la droite $\mathcal{D}$ est distincte de Δ_∞, donc Δ et $\mathcal{D}$ sont sécantes.

Notons N_0 l'unique point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$. Comme $M \notin \Delta$ et $N_0 \in \Delta$, les points M et N_0 sont distincts, donc il y a une unique droite passant par M et N_0. Or $M \in \mathcal{D}$ par définition de $\mathcal{D}$, et $N_0 \in \mathcal{D}$ par définition de N_0, donc $(MN_0) = \mathcal{D}$.

D'autre part, si $N \in \Delta$ vérifie $(MN) = \mathcal{D}$, alors $N \in \Delta \cap \mathcal{D} = \{N_0\}$ donc $N = N_0$.

Il existe donc un unique point N de Δ tel que $(MN) = \mathcal{D}$, et ce point est l'unique point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$.

(b) Avec les mêmes notations que précédemment, soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des droites de $\mathcal{P}$ passant par M et distinctes de Δ_∞. Traduire le résultat de la question précédente par l'existence d'une bijection de Δ sur $\mathcal{E}$, que l'on explicitera ainsi que sa réciproque.

Soit $f\colon \mathcal{E} \to \Delta$ l'application qui à $\mathcal{D} \in E$ associe l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de Δ. (On a vu en réponse à la question précédente que $\mathcal{D}$ et de Δ sont sécantes dans ce cas. Le point $f(\mathcal{D})$ est alors le point appelé N_0 ci-dessus.)

Soit $g\colon \Delta \to \mathcal{E}$ l'application qui à $N \in \Delta$ associe la droite (MN). (Comme $M \notin \Delta$, cette droite est bien définie ; elle passe par M par définition ; et si elle était parallèle à Δ, alors elle serait confondue avec Δ puisque $N \in (MN) \cap \Delta$, et on aurait $M \in \Delta$, ce qui est faux. On a donc bien $(MN) \in \mathcal{E}$.)

Montrons que ces applications f et g sont réciproque l'une de l'autre.

Soit $\mathcal{D} \in E$, et soit $N := f(\mathcal{D})$. D'après la question précédente, on a $(MN) = \mathcal{D}$, donc $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soit $N \in \Delta$, et soit $\mathcal{D} := g(N) = (MN)$. Alors $f((MN))$ est l'unique point d'intersection de (MN) et Δ. Or $N \in (MN) \cap \Delta$, donc $f((MN)) = N$. On a donc aussi $f \circ g = \mathrm{id}_\Delta$.

Les applications f et g ainsi définies sont donc des bijections réciproque l'une de l'autre.

(c) Soit Δ_0 la droite d'équation $y = 0$, Δ_1 la droite d'équation $x = 0$, A le point $(1, 1)$. Pour $t \in \mathbb{R}$ soit N_t le point $(t, 0)$. Déterminer l'ensemble F des éléments $t \in \mathbb{R}$ tels que la droite (AN_t) n'est pas parallèle à Δ_1.

La droite Δ_1, d'équation $x = 0$, continent les points (distincts) de coordonnées $(0, 0)$ et $(0, 1)$, donc elle est dirigée par le vecteur de coordonnées $(0, 1)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme le point A a pour coordonnées $(1, 1)$ et le point N_t a pour coordonnées $(t, 0)$, le vecteur $\overrightarrow{AN_t}$ a pour coordonnées $(t - 1, -1)$. Ce vecteur est non nul, donc la droite (AN_t) est bien définie. Le vecteur $\overrightarrow{AN_t}$ est un vecteur directeur de la droite (AN_t). Les droites Δ_1 et (AN_t) sont donc parallèles si et seulement si les vecteurs de coordonnées $(0, 1)$ et $(t - 1, -1)$ sont colinéaires.

En regardant la seconde coordonnée, on trouve que le vecteurs de coordonnées $(0, 1)$ et $(t - 1, -1)$ sont colinéaires si et seulement si $(t - 1, -1) = (0, -1)$, c'est-à-dire si et seulement si $t = 1$.

L'ensemble F des éléments $t \in \mathbb{R}$ tels que la droite (AN_t) n'est pas parallèle à Δ_1 est donc $F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(d) Avec les mêmes notations et hypothèses que la question précédente. Soit $t \in F$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K_t des droites (AN_t) et Δ_1.

D'après les coordonnées de A et du vecteur $\overrightarrow{AN_t}$ (cf. la question précédente), les points de la droite (AN_t) sont les point de coordonnées

$$(1 + \lambda(t - 1), 1 - \lambda)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'intersection avec la droite Δ_1 d'équation $x=0$ correspond à $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$1+\lambda(t-1)=0.$$

Comme $t \neq 1$ (puisque $t \in F$), cette équation a pour unique solution $\lambda = \frac{1}{1-t}$. Les droites (AN_t) et Δ_1 ont donc un unique point d'intersection K_t de coordonnées

$$\left(0, 1-\frac{1}{1-t}\right) = \left(0, \frac{t}{t-1}\right).$$

(e) Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est une bijection de F sur $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Consédérons les applications

$$\varphi\colon \begin{cases} F & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\neq 0} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-1} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{\neq 0} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 1+\frac{1}{x}. \end{cases}$$

(Notons qu'un quotient de la forme $\frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, ne peut pas être nul, donc on arrive bien dans les ensembles annoncés et ces deux applications sont correctement définies.)
Soit $x \in F$. On a alors $\varphi(x) = \frac{1}{x-1}$, donc

$$\psi(\varphi(x)) = \psi\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = 1 + (x-1) = x,$$

donc $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_F$.
Soit $y \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. On a :

$$\varphi(\psi(y)) = \varphi\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{y}-1} = y,$$

donc $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\neq 0}}$.
L'application φ et donc bien une bijection, d'application réciproque ψ.

(f) En déduire l'ensemble décrit par les points K_t quand t décrit F (la réponse fera intervenir le point $B=(0,1)$). Retrouver le résultat géométriquement.

L'ensemble $\{K_t ; t \in F\}$ est l'ensemble des points de coordonnées dans

$$\left\{\left(0, 1-\frac{1}{1-t}\right) ; t \in F\right\},$$

d'après la question (d), c'est-à-dire dans

$$\{(0, 1+\varphi(t)) ; t \in F\}$$

avec les notations de la réponse à la question précédente. Or l'application $\varphi\colon F \to \mathbb{R}_{\neq 0}$ est une bijection, donc

$$\{(0,1+\varphi(t)) ; t \in F\} = \left\{(0,1+u); u \in \mathbb{R}_{\neq 0}\right\} = \{0\} \times \mathbb{R}_{\neq 1}.$$

On trouve donc

$$\{K_t ; t \in F\} = \Delta_1 \setminus \{B\}.$$

Notons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des droites passant par A et non parallèles à Δ_0. Soit $g_0\colon \Delta_0 \to \mathcal{E}_0$ l'application qui à un point $N \in \Delta_0$ associe la droite $g(N) := (AN)$. D'après la question (b), l'application g_0 est bien définie et est une bijection.

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des droites passant par A et non parallèles à Δ_1. Soit $f_1\colon \mathcal{E}_1 \to \Delta_1$ l'application qui à une droite $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_1$ associe l'unique point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ_1. D'après la question (b), l'application f_1 est bien définie et est une bijection.

L'ensemble des points N_t pour $t \in F$ est $\Delta_0 \setminus \{N_1\}$. Comme g_0 est une bijection, l'ensemble des droites $g_0(N_t)$ pour $t \in F$ est

$$\mathcal{E}_0 \setminus \{g(N_1)\} = \mathcal{E}_0 \setminus \{(AN_1)\}.$$

D'après la réponse à la question (c), la droite (AN_1) est parallèle et passe à Δ_1, et elle passe par A, donc

$$\mathcal{E}_0 \setminus \{(AN_1)\} = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \setminus \{(AB)\}$$

(en utilisant le fait que (AB) est la droite parallèle à Δ_0 passant par A).

Comme K_t, pour $t \in F$, est l'unique point d'intersection de $(AN_t) = g(N_t)$ avec Δ_1, on a $K_t = f_1(g_0(N_t))$. Comme f_1 est une bijection, l'ensemble des points K_t ainsi obtenus est $\Delta_1 \setminus \{f_1((AB))\}$. Finalement, l'unique point d'intersection de (AB) et Δ_1 est B, donc $f_1((AB)) = B$, et on retrouve

$$\{K_t; t \in F\} = \Delta_1 \setminus \{B\}.$$

On peut aussi construire directement une bijection

$$\rho\colon \Delta_0 \setminus \{N_1\} \longrightarrow \Delta_1 \setminus \{B\}$$

telle que $\forall t \in F, \rho(N_t) = K_t$. Si $N \in \Delta_0 \setminus \{N_1\}$, les droites (AN) et Δ_1 ont un unique point d'intersection (d'après la question (d)), que l'on note $\rho(N)$. Ce point de Δ_1 est bien distinct de B car la droite (AB) est parallèle à Δ_0 et ne peut donc pas être une droite (AN) avec $N \in \Delta_0$. Ceci définit donc l'application ρ recherchée, et on a alors $\forall t \in F, \rho(N_t) = K_t$.

Si $K \in \Delta_1 \setminus \{B\}$, la droite (AK) passe par M et est distincte de l'unique droite passant par A et parallèle à Δ_0 (à savoir la droite (AB), donc elle a un unique point d'intersection $\sigma(K)$ avec Δ_0. Ce point est distinct de N_1 car la droite (AN_1) est parallèle à Δ_1 et ne peut donc pas être de la forme (AK) avec $K \in \Delta_1$. On obtient ainsi une application

$$\sigma\colon \Delta_1 \setminus \{B\} \longrightarrow \Delta_0 \setminus \{N_1\}.$$

Si $N \in \Delta_0 \setminus \{N_1\}$, le point $\rho(N)$ est l'unique point d'intersection de (AN) et Δ_1, et $A \notin \Delta_1$, donc $(A\,\rho(N)) = (AN)$. Le point $\sigma(\rho(N))$ est alors l'unique point d'intersection de (AN) et Δ_0, donc c'est N.

Le même raisonnement (en partant de $K \in \Delta_1 \setminus \{B\}$ montre que $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_{\Delta_1 \setminus \{B\}}$.

Comme ρ est une bijection, on retrouve

$$\{K_t; t \in F\} = \operatorname{im} \rho = \Delta_1 \setminus \{B\}.$$