Corrigé du Contrôle continu 1

Exercice 1. La proposition (P et Q) $\Rightarrow$ ((non P) ou Q) est-elle vraie ?

Réponse. Supposons que la proposition (P et Q) est vraie, alors Q est vraie, donc ((non P) ou Q) est vraie, ce qui démontre l'implication.

Exercice 2. Soit E un ensemble. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que :

$$(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C.$$

Réponse. On suppose que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, et on veut démontrer que $B \subset C$. Pour cela, soit $x \in B$. Distinguons deux cas :

— si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. Comme $A \cap B \subset A \cap C$, on déduit que $x \in A \cap C$, en particulier $x \in C$.

— si $x \notin A$, alors l'hypothèse $x \in B$ implique $x \in A \cup B$. Comme $A \cup B \subset A \cup C$, on déduit que $x \in A \cup C$. Mais ici $x \notin A$, c'est donc que $x \in C$.

Dans tous les cas $x \in C$. On a donc démontré que $B \subset C$.

Exercice 3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $3^n \geqslant (n+1)^2$.

Réponse. Notons $P(n)$ la proposition : $3^n \geqslant (n+1)^2$.

Initialisation. Si $n = 2$, on a $3^n = 9$ et $(n+1)^2 = 9$ donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un entier $n \geqslant 2$, la proposition $P(n)$ est vraie. On a donc $3^n \geqslant (n+1)^2$. Alors en multipliant par 3 de part et d'autre de l'inégalité, on trouve $3^{n+1} \geqslant 3(n+1)^2$. Or, pour $n \geqslant 2$ on a $n+1 \geqslant 3$ donc $2n(n+1) \geqslant 12$ et $2n(n+1) - 1 \geqslant 11$. On en déduit que

$$3(n+1)^2 - (n+2)^2 = (3n^2 + 6n + 3) - (n^2 + 4n + 4) = 2n(n+1) - 1 \geqslant 11 \geqslant 0.$$

Finalement $3^{n+1} \geqslant 3(n+1)^2 \geqslant (n+2)^2$, ce qui démontre que $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 4. On fixe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un nombre réel a. Donnez la négation de la proposition suivante :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists \eta \in \mathbb{R}_{>0}, \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Réponse. La négation de la proposition est :

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \forall \eta \in \mathbb{R}_{>0}, \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon.$$