Algèbre et géométrie 1

Corrigé du contrôle n° 3

Exercice 1

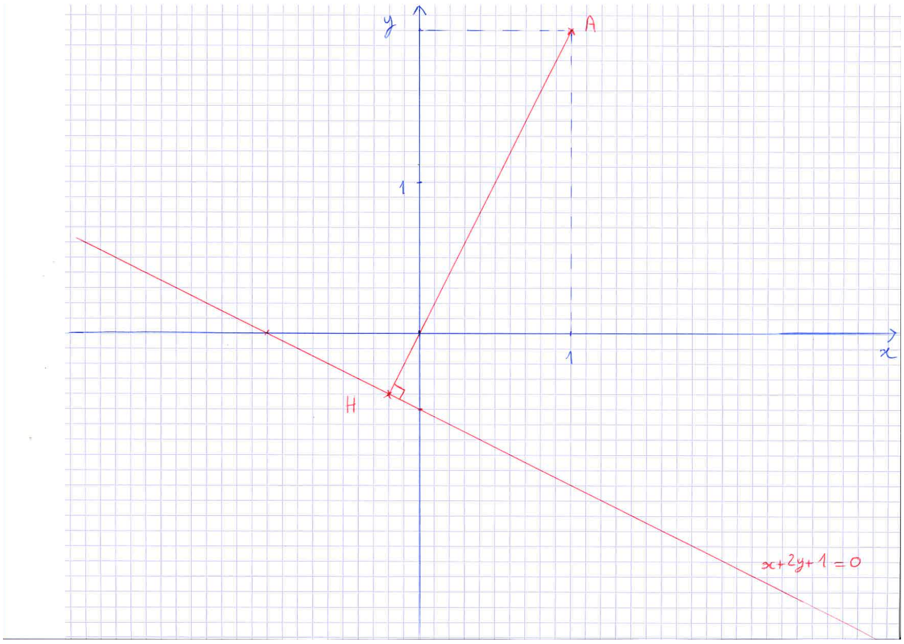
Le plan est muni d'un repère orthonormé et identifié à $\mathbf{R}^2$. Soit Δ la droite d'équation $x+2y+1=0$ et $A=(1,2)$.

1. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de Δ ainsi qu'une représentation paramétrique de Δ.
2. Montrer qu'il existe un unique point $H \in \Delta$ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ et déterminer les coordonnées de H.
3. Faire un dessin.

Correction

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a
$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow x = -2y-1$$
Ceci montre que
$$\begin{cases} x = -2\alpha - 1 \\ y = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}$$
est une représentation paramétrique de Δ et que $\overrightarrow{u} = (-2,1)$ est un vecteur directeur de Δ.
2. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ soit $M_\alpha := (-2\alpha-1, \alpha)$. On a donc $\overrightarrow{AM_\alpha} = (-2\alpha-1-1, \alpha-2) = (-2\alpha-2, \alpha-2)$ d'où
$$\overrightarrow{AM_\alpha} \cdot \overrightarrow{u} = (-2\alpha-2, \alpha-2) \cdot (-2,1)$$
soit
$$\overrightarrow{AM_\alpha} \cdot \overrightarrow{u} = 5\alpha + 2$$
L'équation
$$\overrightarrow{AM_\alpha} \cdot \overrightarrow{u} = 0, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$
possède donc une unique solution $\alpha_0 = -\frac{2}{5}$ et $H := M_{\alpha_0} = (-2.(-\frac{2}{5}) - 1, -\frac{2}{5}) = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$ est donc l'unique point de Δ tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.

3.



Exercice 2

Soit P, Q, R trois points du plan non alignés. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Soit I le milieu de $[PQ]$ et J_α le barycentre de (Q, α) et $(R, 1-\alpha)$.

1. Montrer que $I \neq R$ et $P \neq J_\alpha$.
2. Déterminer l'ensemble E des valeurs de α pour lesquelles le barycentre de $\{(P,\alpha),(Q,\alpha),(R,1-\alpha)\}$ est défini. Pour $\alpha \in E$, on note G_α ce barycentre.
3. Soit $\alpha \in E$, *supposé non nul*. Montrer que G_α est un point commun aux droites (IR) et (PJ_α).
4. *(bonus, hors barême)* Que se passe-t-il si $\alpha = 0$?

Correction

1. Comme I est le milieu de $[PQ]$, I appartient à la droite (PQ). Comme P, Q, R ne sont pas alignés, on a donc $I \neq R$. De même, comme J_α est un barycentre de Q et R, J_α est sur la droite (QR). Comme P, Q, R ne sont pas alignés, on a donc $J_\alpha \neq P$.
2. Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, le barycentre de $\{(P,\alpha),(Q,\alpha),(R,1-\alpha)\}$ est défini si et seulement si $\alpha+\alpha+1-\alpha \neq 0$ Ceci équivaut à $1+\alpha \neq 0$ ou encore à $\alpha \neq -1$. Ainsi $E = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
3. Notons que les droites (IR) et (PJ_α) sont bien définies d'après la première question.
   Par définition de J_α et associativité du barycentre, $\mathrm{Bar}((P,\alpha),(Q,\alpha),(R,1-\alpha)) = \mathrm{Bar}((P,\alpha),(J_\alpha,1))$ Ainsi G_α appartient à la droite (PJ_α)
   Par ailleurs, comme I est le milieu de $[PQ]$, on a $I = \mathrm{Bar}((P,1),(Q,1))$. Comme α est supposé *non nul*, on a $I = \mathrm{Bar}((P,\alpha),(Q,\alpha))$. Par associativité du barycentre on en déduit que $\mathrm{Bar}((P,\alpha),(Q,\alpha),(R,1-\alpha)) = \mathrm{Bar}((I,2\alpha),R,(1-\alpha))$ En particulier G_α appartient à la droite (IR).

4. Notons que $0 \in E$. Si $\alpha = 0$, montrons que le résultat de la question précédente, à savoir G_α est un point commun aux droites (PJ_α) et (IR), est encore vrai.

   La démonstration du fait que $G_\alpha \in (PJ_\alpha)$ n'utilisait pas le fait que α était supposé non nul, et reste valide si $\alpha = 0$

   Par contre, si $\alpha = 0$, on ne peut plus écrire $I = \text{Bar}((P, \alpha), (Q, \alpha))$ (ce barycentre n'est pas défini) et le raisonnement qui montrait $G_\alpha \in (IR)$ ne s'applique plus. Cependant on a $G_0 = \text{Bar}((P, 0), (Q, 0), (R, 1))$. Montrons que $G_0 = R$, ce qui montre en particulier que $G_0 \in (IR)$. En effet, on sait que G_0 est caractérisé par la propriété

   $$0 \cdot \overrightarrow{G_0P} + 0 \cdot \overrightarrow{G_0Q} + 1 \cdot \overrightarrow{G_0R} = \overrightarrow{0}$$

   Or on a

   $$0 \cdot \overrightarrow{RP} + 0 \cdot \overrightarrow{RQ} + 1 \cdot \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

   ce qui montre bien que $G_0 = R$.