UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Corrigé du contrôle n°1

Exercice 1

Démontrer que les propositions

$$\mathcal{P} \text{ et } ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R}$$

sont équivalentes.

- Supposons que
$$\mathcal{P} \text{ et } ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}).$$
Comme $\mathcal{P}$ est vraie, ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) l'est aussi. Comme ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\Longrightarrow \mathcal{R}$, on en déduit que $\mathcal{R}$ est vraie. Donc ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$) est vraie.
- Réciproquement, si ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$) est vraie, alors $\mathcal{P}$ est vraie. De plus, comme $\mathcal{R}$ est vraie, l'implication ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) $\Longrightarrow \mathcal{R}$ est vraie aussi, ce qui démontre
$$\mathcal{P} \text{ et } ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}).$$

On a donc l'équivalence voulue.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 0$, notons

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} k\,3^k = 0 \times 3^0 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \cdots + n\,3^n.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \qquad S_n = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$

Pour n entier naturel, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$S_n = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4}.$$

- Dans le cas $n = 0$, on a $S_0 = 0 \times 3^0 = 0 \times 1 = 0$ et $\frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}3^1 + \frac{3}{4} = 0$, donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a
$$S_n = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4},$$

or $S_{n+1} = S_n + (n+1)\,3^{n+1}$ par définition de S_{n+1}, donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4} + (n+1)\,3^{n+1} \\ &= 3^{n+1}\left(\frac{2n-1}{4} + n + 1\right) + \frac{3}{4} \\ &= 3^{n+1}\,\frac{6n+3}{4} + \frac{3}{4} \\ &= 3^{n+2}\,\frac{2n+1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{2(n+1)-1}{4}3^{(n+1)+1} + \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Exercice 3

L'application F suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ? (N'oubliez pas la démonstration !)

$$F\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array} \right.$$

Comme $F(0) = |1| = 1$ et $F(-2) = |-1| = 1$, on a $F(0) = F(-2)$. Or $0 \neq -2$, donc cette application n'est pas injective. Elle n'est donc pas non plus bijective.

Montrons que l'application F est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Posons $x = y - 1$. On bien $x \in \mathbb{R}$, et

$$F(x) = |x+1| = |(y-1)+1| = |y|,$$

or $y \geqslant 0$, donc $F(x) = y$, ce qui démontre la surjectivité de F.