

# Introduction aux mathématiques condensées

Jules Givelet

Université de Rennes  
Stage encadré par Bernard Lestum

14 Septembre 2023

$\mathbf{Ab}(\mathbf{Top}) = \{\text{groupes abéliens topologiques}\}$  est une catégorie pré-abélienne :

$$\text{id} : D\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\text{Ker id} = 0 \Rightarrow \text{id}$  est injectif,  $\text{coKer id} = 0 \Rightarrow \text{id}$  est surjectif

$\mathbf{Ab}(\mathbf{Top})$  n'est pas abélienne :  $D\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}$ .

# Objectif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Top} & \longrightarrow & \mathbf{Topos} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{Ab}(\mathbf{Top}) & \longrightarrow & \mathbf{Ab}(\mathbf{Topos}) \end{array}$$

## Proposition

La catégorie des groupes abéliens d'un topos est une catégorie abélienne vérifiant les axiomes de Grothendieck AB5 et AB3\*.

## 1ère étape : Plongement de Yoneda

$$\mathbf{Top} \hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathbf{Top}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})$$

$$X \mapsto \widehat{X}$$

$$\forall S \in \mathbf{Top}, \widehat{X}(S) := C(S, X)$$

$$\widehat{X}(f : S_1 \rightarrow S_2) := - \circ f : C(S_2, X) \rightarrow C(S_1, X)$$

$$\mathbf{Ab}(\mathbf{Fun}(\mathbf{Top}^{\text{op}}, \mathbf{Ens})) = \mathbf{Fun}(\mathbf{Top}^{\text{op}}, \mathbf{Ab}).$$

Si  $A \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Top})$  et  $S \in \mathbf{Top}$ ,

$$\widehat{A}(S) = C(S, A) < A^S.$$

## 2ème étape : La notion de faisceau

$$\text{Fun}(\mathbf{Top}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}) = \{\text{préfaisceaux}\} =: \text{PSh}(\mathbf{Top})$$

### Définition

Un préfaisceau  $\mathcal{F} : \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est un faisceau s'il vérifie les conditions suivantes :

(i<sub>0</sub>)  $\mathcal{F}(\emptyset) = \{*\}$ .

(i) Pour tout  $S_1, S_2 \in \mathbf{Top}$ , la flèche

$$\mathcal{F}(J_1) \times \mathcal{F}(J_2) : \mathcal{F}(S_1 \sqcup S_2) \rightarrow \mathcal{F}(S_1) \times \mathcal{F}(S_2)$$

est bijective.

(ii) Pour toute application  $\pi : S' \twoheadrightarrow S$  continue surjective, on a le diagramme d'égaliseur

$$\mathcal{F}(S) \xrightarrow{\mathcal{F}(\pi)} \mathcal{F}(S') \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}(p_1)} \\ \xrightarrow{\mathcal{F}(p_2)} \end{array} \mathcal{F}(S' \times_S S').$$

# Cas des préfaisceaux représentables par un espace topologique

Soit  $X \in \mathbf{Top}$ .

$$(i_0) \quad \widehat{X}(\emptyset) = C(\emptyset, X) = \{\emptyset\}$$

(i)  $C(S_1 \sqcup S_2, X) \simeq C(S_1, X) \times C(S_2, X)$  (propriété universelle de l'union disjointe).

(ii) On a le diagramme d'égaliseur

$$C(S, X) \xrightarrow{-\circ\pi} C(S', X) \begin{array}{c} \xrightarrow{-\circ p_1} \\ \xrightarrow{-\circ p_2} \end{array} C(S' \times_S S', X)$$

à condition que  $\pi : S' \rightarrow S$  soit fermée (propriété universelle du quotient).

## 3ème étape : Restriction aux espaces compacts

$\widehat{X}$  est un faisceau sur  $\mathbf{Comp} = \{\text{espaces compacts (Hausdorff)}\}$ .

$$\mathbf{PSh}(\mathbf{Top}) \longrightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{Comp})$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{Top} & \text{---} & \mathbf{Sh}(\mathbf{Comp}) \end{array}$$

$$X \longmapsto \underline{X}$$

**Attention !** Le foncteur  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{Comp})$  est fidèle mais pas essentiellement injectif sur les objets :

$$\underline{kX} = \underline{X}$$

où  $kX$  est la  $k$ -ification de  $X$ .

### Définition

Si  $X$  est un espace topologique tel que  $kX = X$ , on dit qu'il est compactement engendré.

$\mathbf{CG} := \{\text{espaces compactement engendrés}\}$ .

### Exemple

- $kX$  ( $k : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$  est involutive)
- les espaces localement compacts

La composition  $\mathbf{CG} \hookrightarrow \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{Comp})$  est pleinement fidèle.



# Plusieurs modèles possibles pour les maths condensées

$$\begin{aligned} \mathbf{Comp} \supset \mathbf{Stone} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{compacts totalement discontinus} \\ (\pi_0(X) = X) \end{array} \right\} \\ &\supset \mathbf{ED} = \left\{ \begin{array}{l} \text{compacts extrêmement discontinus} \\ (U \text{ ouvert} \Rightarrow \bar{U} \text{ ouvert}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

## Théorème

Les foncteurs de restriction  $\mathbf{Sh}(\mathbf{Comp}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{Stone}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{ED})$  sont des équivalences de catégories.

La catégorie **Cond** des ensembles condensés peut être définie comme n'importe laquelle de ces catégories équivalentes.

# Limites et colimites

## Proposition

Soit  $A \subset \mathbf{Ab}(\mathbf{Sh}(\mathbf{ED}))$  un diagramme de groupes abéliens condensés. Pour tout  $S \in \mathbf{ED}$ , on a

$$\left( \lim_i A_i \right) (S) = \lim_i A_i(S),$$

$$\left( \operatorname{colim}_i A_i \right) (S) = \operatorname{colim}_i A_i(S).$$

Conséquence :

## Théorème

La catégorie  $\mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})$  des groupes abéliens condensés est une catégorie abélienne **vérifiant les axiomes de Grothendieck AB6 et AB4\***.

## Exemple

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & D\mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \text{ (exacte)} \\
 & & \downarrow \text{~~~~~} & & \downarrow \text{condensation} & & \\
 0 & \longrightarrow & \underline{D\mathbb{R}} & \xrightarrow{\text{id}} & \underline{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}} \longrightarrow 0 \text{ (exacte)}
 \end{array}$$

Pour  $S \in \mathbf{Stone}$ ,

$$(\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}})(S) = \underline{\mathbb{R}}(S)/\underline{D\mathbb{R}}(S) = \frac{C(S, \mathbb{R})}{C_{\text{loc. cste.}}(S, \mathbb{R})}.$$

Donc, si  $S = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , on a  $\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}}(S) \neq 0$ .

Remarque :  $\underline{D\mathbb{R}}(*) \simeq D\mathbb{R}$ ,  $\underline{\mathbb{R}}(*) \simeq \mathbb{R}$  et  $(\underline{\mathbb{R}}/\underline{D\mathbb{R}})(*) = 0$ .

# Espace sous-jacent à un ensemble condensé

Plus généralement, on peut définir un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cond} & \rightarrow & \mathbf{Top} \\ \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(\ast) \end{array}$$

On a toujours  $\underline{X}(\ast) \simeq kX$ .

C'est un adjoint à la condensation :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{X}) \simeq C(\mathcal{F}(\ast), X).$$

- 1 Ensembles et groupes abéliens condensés
- 2 Produit tensoriel et Hom interne de groupes abéliens condensés
- 3 Bibliographie

# Abstraction du produit tensoriel

## Définition

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est monoïdale symétrique si elle est munie d'un bifoncteur  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , d'un objet  $1 \in \mathcal{C}$  ainsi que d'isomorphismes naturels :

$$(A \otimes B) \otimes C \simeq A \otimes (B \otimes C)$$

$$A \otimes B \simeq B \otimes A$$

$$1 \otimes A \simeq A.$$

# Propriété universelle du produit tensoriel

## Définition

Une catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  est dite fermée si elle admet un foncteur Hom interne  $\underline{\text{Hom}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  adjoint à  $\otimes$  :

$$\text{Hom}(A \otimes B, C) \simeq \text{Hom}(A, \underline{\text{Hom}}(B, C)).$$

## Exemples

- Les catégories cartésiennes :
  - $(\mathbf{Ens}, \times, \{*\}, Y^X)$ ,
  - $(\mathbf{Top}, \times, \{*\})$  n'est pas fermée,
  - $(\mathbf{CG}, \times_k, \{*\}, kC(X, Y))$ .
- $(A - \mathbf{Mod}, \otimes_A, \text{Hom}_A)$
- $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}})$ .

## Pour les ensembles condensés

$X, Y \in \mathbf{Cond}$ ,  $S \in \mathbf{Comp}$ ,

$$(X \times Y)(S) = X(S) \times Y(S)$$

$$\mathcal{H}om(X, Y)(S) = \mathcal{H}om_{\mathbf{Cond}}(X \times \underline{S}, Y).$$

### Théorème

Pour tous espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , si  $X$  est compactement engendré, alors on a un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{H}om(\underline{X}, \underline{Y}) \xrightarrow{\sim} \underline{C(X, Y)}.$$



# Pour les groupes abéliens condensés

$A, B \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond}), S \in \mathbf{Comp},$

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)(S) = A(S) \otimes_{\mathbb{Z}} B(S).$$

$A \otimes_{\mathbb{Z}} B$  n'est pas un faisceau en général ! Il faut faisceautiser :

$$A \tilde{\otimes}_{\mathbb{Z}} B := (A \otimes_{\mathbb{Z}} B)^{\#}.$$

$$\underline{\mathbf{Hom}}(A, B)(S) = \mathbf{Hom}_{\mathbf{Ab}(\mathbf{Cond})}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\underline{S}], B).$$

Calcul explicite de Hom

## Théorème








 $X \in \mathbf{Cond}, A, B \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond}),$ 

$$\mathcal{H}om(X, B) \simeq \underline{\mathbf{Hom}}(\mathbb{Z}[X], B) \in \mathbf{Ab}(\mathbf{Cond}).$$

$$\underline{\mathbf{Hom}}(A, B) \hookrightarrow \mathcal{H}om(A, B).$$

Pour tous groupes topologiques  $A$  et  $B$ , si  $A$  est compactement engendré, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\underline{A}, \underline{B}) & \xrightarrow{\sim} & \underline{C(A, B)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathbf{Hom}}(\underline{A}, \underline{B}) & \xrightarrow{\sim} & \underline{C_{\mathbb{Z}}(A, B)} \end{array}$$

- Pour la théorie des faisceaux :
  -  SGA4 (M. Artin, A. Grothendieck, J-L. Verdier), exposé II
  - Sketches of an elephant (P. Johnstone)
- Pour les maths condensées :
  -  Lectures on Condensed Mathematics (D. Clausen, P. Scholze)
  -  The foundations of Condensed Mathematics (D. Ásgeirsson)
- Pour le Hom interne en mathématiques condensées :
  -  Condensed Mathematics, The internal Hom of condensed sets and condensed abelian groups and a prismatic construction of the real numbers (S. Marlasca Aparicio)
- Des sites utiles :
  -  Wikipedia
  -  nLab
  -  The Stacks Project