Séminaire de M2 sur les Perfectoïdes

William Frémont

31 décembre 2023

Pour un petit point introductif et historique, les perfectoïdes ont été introduits en 2012 par Peter Scholze pour résoudre des problèmes mathématiques en caractéristique mixte, c'est-à-dire faisant intervenir les caractéristiques nulle et positive.

1 Deux premiers exemples introductifs

On allons construire dans cette partie deux corps perfectoïdes dont l'un sera le basculé de l'autre. Ces notions seront définies dans la deuxième partie.

1.1 Une première bijection

Remarquons tout d'abord que nous avons une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{F}_p[t]$ (avec p un nombre premier). Elle nous est donnée en écrivant tout entier de manière unique dans son écriture en base p :

$$n = a_d p^d + ... + a_1 p + a_0 = \sum_{i=0}^{d} a_i p^i \text{ avec pour tout } i,\ a_i \in [\![0; p-1]\!].$$

Auquel on peut naturellement associer un polynôme f de $\mathbb{F}_p[t]$:

$$f(t) = \overline{a_d} t^d + ... + \overline{a_1} t + \overline{a_0} = \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} t^i \text{ avec pour tout } i,\ \overline{a_i} \in \mathbb{F}_p.$$

On remarque que le demi-anneau $(\mathbb{N}, +, \times)$ peut se voir comme « $\mathbb{N}[p]$ », c'est-à-dire le demi-anneau engendré par $\mathbb{N}$ et p, des polynômes en p à coefficients dans $\mathbb{N}$. On a donc la bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p[t] \\ \sum_{i=0}^{d} a_i p^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} t^i \end{array}$$

Celle-ci est à bien comprendre comme une bijection entre deux ensembles, ce n'est pas un morphisme compatible avec les opérations $+$ et $\times$.

1.2 Étapes vers l'obtention de nos premiers corps perfectoïdes

Pour obtenir nos deux premiers corps perfectoïdes, nous allons devoir procéder en trois étapes :

1. Obtenir un corps par localisation.
2. Perfectiser notre ensemble, c'est-à-dire ajouter certaines puissances fractionnaires de p (respectivement t), pour avoir un corps parfait.
3. Compléter pour la valuation p-adique (respectivement la valuation des polynômes)

Pour l'étape de perfectisation, on note $\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}] := \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}]$ et $\mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}] := \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}]$. On résume les trois étapes dans les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} & & & & \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}] \\
& \mathbb{N}[p^{-1}] \arrow[ul, "1"] & & \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}] \arrow[ur, "2"] & \\
& & \mathbb{N} \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "2"] \arrow[d, "3"] & & \\
& & \mathbb{Z}_p & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_p(t) & & & & \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}] \\
& \mathbb{F}_p[t, t^{-1}] \arrow[ul, "1"] & & \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}] \arrow[ur, "2"] & \\
& & \mathbb{F}_p[t] \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "2"] \arrow[d, "3"] & & \\
& & \mathbb{F}_p[[t]] & &
\end{tikzcd}$$

L'étape 1 revient, dans un premier temps, à considérer les indices négatifs dans nos sommes dans la bijection de la partie 1.1. On obtient alors une nouvelle bijection :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}[p^{-1}] & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p[t, t^{-1}] \\
\sum\limits_{i=-e}^{d} a_i p^i & \longmapsto & \sum\limits_{i=-e}^{d} \overline{a_i} t^i
\end{array}$$

Il reste ensuite à prendre la symétrisation du monoïde $(\mathbb{N}[p^{-1}], +)$ pour obtenir l'anneau intègre $(\mathbb{Z}[p^{-1}], +, \times)$ et enfin à prendre le corps des fractions de $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ qui est $\mathbb{Q}$.

L'étape 2 revient, dans un premier temps, à remplacer p^i (respectivemment t^i) par $p^{\frac{i}{p^n}}$ (respectivement $t^{\frac{i}{p^n}}$) dans nos sommes dans la bijection de la partie 1.1. On obtient alors une nouvelle bijection :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}] & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}] \\
\sum\limits_{i=0}^{d} a_i p^{\frac{i}{p^n}} & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{d} \overline{a_i} t^{\frac{i}{p^n}}
\end{array}$$

Dans un second temps, il faut passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Enfin l'étape 3 revient à considérer les indices infinis positifs dans nos sommes dans la bijection de la partie 1.1. On obtient alors une nouvelle bijection :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_p & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p[[t]] \\
\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i p^i & \longmapsto & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \overline{a_i} t^i
\end{array}$$

1.3 Commutativité des étapes

Nous allons à présent nous intéresser à l'ordre dans lequel effectuer ces trois étapes.

Si (E, d) est un espace métrique, on note $\widehat{E}$ son complété.

L'étape 1, pour obtenir un corps, commute avec les étapes 2 et 3. En revanche l'étape 3 de complétion doit être effectuée après l'étape 2 de perfectisation sinon nous aurons de nouveau besoin de compléter après avoir perfectisé pour bien avoir à la fin un corps complet.

Nous résumons la commutativité de ces étapes dans les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbb{N} \arrow[dlll, "1"'] \arrow[d, "2"] \arrow[drrr, "3"] & & & & \\
 & \mathbb{Q} \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "3"] & & & \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "3"] & & & \mathbb{Z}_p \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathbb{Q}(p^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & & \mathbb{Q}_p \arrow[d, "2"] & \mathbb{Q}(p^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & & \widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} \arrow[d, "1"] & \mathbb{Q}_p \arrow[d, "2"] & & \mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}] \arrow[d, "1"] \\
\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} & & \mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} & & \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} & \mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & & \mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] \\
 & & \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} & & & & \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} & & \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbb{F}_p[t] \arrow[dlll, "1"'] \arrow[d, "2"] \arrow[drrr, "3"] & & & & \\
 & \mathbb{F}_p(t) \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "3"] & & & \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "3"] & & & \mathbb{F}_p[[t]] \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & & \mathbb{F}_p((t)) \arrow[d, "2"] & \mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^\infty}}) \arrow[d, "3"] & & \widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]} \arrow[d, "1"] & \mathbb{F}_p((t)) \arrow[d, "2"] & & \mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]] \arrow[d, "1"] \\
\widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))} & & \mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}})) \arrow[d, "3"] & \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))} & & \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))} & \mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}})) \arrow[d, "3"] & & \mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}})) \arrow[d, "3"] \\
 & & \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))} & & & & \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))} & & \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}
\end{tikzcd}$$

On a donc les correspondances bijectives entre :

$\mathbb{N}$	$\mathbb{F}_p[t]$
$\mathbb{N}[p^{-1}]$	$\mathbb{F}_p[t, t^{-1}]$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}_p(t)$
$\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}]$	$\mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}]$
$\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]$	$\mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}]$
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{F}_p[[t]]$
$\mathbb{Q}_p$	$\mathbb{F}_p((t))$
$\mathbb{Q}(p^{\frac{1}{p^\infty}})$	$\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^\infty}})$
$\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]$	$\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]$
$\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]}$	$\widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}$
$\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})$	$\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))$
$\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$	$\widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$

Et nous avons ainsi obtenu nos deux premiers corps perfectoïdes : $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$ et son basculé $\widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$.

2 Définition de corps perfectoïde et de basculé

2.1 Corps perfectoïdes

Dans cette partie nous allons définir la notion de corps perfectoïde. Pour cela nous allons introduire au préalable plusieurs autres définitions.

Définition 1 (Anneau topologique)**.**
*Un **anneau topologique** R est un anneau muni d'une topologie rendant les opérations $+$ et $\times$ continues. Un **corps topologique** K est un anneau topologique qui est un corps et dont le passage à l'inverse est de plus continue.*

L'opération de passage à l'opposé est alors automatiquement continue puisqu'elle correspond à la multiplication par -1.

Définition 2 (Valeur absolue)**.**
*Une **valeur absolue** $|\cdot|$ sur un anneau intègre R est une application de R à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(x,y) \in R^2$:*

1. *$|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (séparation).*

2. *$|xy| = |x|\ |y|$ (multiplicativité).*

3. *$|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).*

On note d la fonction telle que :

$$\forall (x,y) \in R^2,\ d(x,y) = |x-y|$$

Proposition 1.
Une valeur absolue $|\cdot|$ définit une distance d sur notre anneau intègre R telle que la topologie issue de cette distance fasse de R un anneau topologique.

Démonstration 1.
La séparation de d est donnée par la séparation de $|\cdot|$. La symétrie de d est donnée par la multiplitivité de $|\cdot|$ car $|-x|^2 = |(-x)^2| = |x^2| = |x|^2$ et donc $|x| = |-x|$ car $|\cdot|$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Enfin l'inégalité triangulaire pour d est donnée par l'inégalité triangulaire de $|\cdot|$.

Définition 3 (Valeur absolue ultramétrique / non-archimédienne)**.**
*Une valeur absolue $|\cdot|$ est dite **ultramétrique ou non-archimédienne** si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

- *$\forall (x,y) \in R^2,\ |x+y| \leq \max(|x|,|y|)$ (inégalité triangulaire ultramétrique).*

- *$\forall n \in \mathbb{N}, |n \cdot 1| = |\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ termes}| \leq 1$ (non-archimédiennité).*

L'inégalité triangulaire ultramétrique implique l'inégalité triangulaire usuelle.

Définition 4 (Groupe ordonné)**.**
*Un **groupe ordonné** G est un groupe $(G,\cdot)$ muni d'une relation d'ordre $\leq$ telle que cette relation soit compatible avec la loi du groupe, i.e. pour tous x, y et z dans G, $x \leq y$ implique $z \cdot x \leq z \cdot y$ et $x \cdot z \leq y \cdot z$. Un groupe est dit **totalement ordonné** si sa relation d'ordre est totale.*

Définition 5 (Valuation)**.**
*Une **valuation** v sur un anneau R est une application de R à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné $(\Gamma,+,\geq)$ auquel on adjoint un élément $+\infty$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma$, $+\infty \geq \gamma$ et $(+\infty)+\gamma = \gamma+(+\infty) = (+\infty)+(+\infty) = +\infty$, telle que pour tout $(x,y) \in R^2$:*

1. *$v(0) = +\infty$ et $v(1) = 0$.*

2. $v(xy) = v(x) + v(y)$.

3. $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Un ***anneau valué*** *R est un anneau intègre muni d'une valuation. Un* ***corps valué*** *K est un corps muni d'une valuation.*

Il y a égalité dans l'axiome 3 si $v(x) \neq v(y)$.

Remarque 1.
Usuellement, on prend $\Gamma = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. Dans le cas où $\Gamma = \mathbb{Z}$, on parle de ***valuation discrète****.*
*Il existe une définition équivalente en notation multiplicative pour les anneaux intègres avec $(\Gamma, \cdot, \leq)$ et $\{0\}$ où le $\min$ de l'axiome sera remplacé par un $\max$ et on retrouvera ainsi les axiomes d'une valeur absolue ultramétrique dans le cas où $(\Gamma, \cdot, \leq) = (\mathbb{R}_+^*, \times, \leq)$. [**12**]*

Remarque 2.
*Si v est une valuation sur un anneau intègre R à valeurs réelles, en prenant un $\rho \in]0; 1[$, $|\cdot|_v$ défini par $\forall x \in K$, $|x|_v := \rho^{v(x)}$ est une valeur absolue ultramétrique sur R. [**13**]*

Définition 6 (Anneau de valuation)**.**
*L'****anneau de valuation*** *R d'un corps valué K est l'anneau formé des éléments de K de valuation positive ou nulle.*

Il correspond donc également aux éléments de valeurs absolues plus petites ou égales à 1 si la valuation v est à valeurs réelles.

Définition 7 (Anneau local)**.**
Un ***anneau local*** *R est un anneau possèdant un unique idéal maximal.*

Remarque 3.
*Un anneau de valuation R est un anneau local d'idéal maximal I, l'ensemble des éléments de K de valuation strictement positive. [**13**]*

Son idéal maximal I est donc aussi l'ensemble des éléments de valeurs absolues strictement plus petites que 1 si la valuation v est à valeurs réelles.

Définition 8 (Corps résiduel)**.**
Le ***corps résiduel associé à un idéal maximal*** *I d'un anneau R est le quotient R/I. Le* ***corps résiduel d'un anneau local*** *R est donc le quotient de R par son unique idéal maximal I. Enfin le* ***corps résiduel d'un corps valué*** *est le corps résiduel de son anneau de valuation.*

Définition 9 (Dimension de Krull)**.**
La ***dimension de Krull*** *d'un anneau R est le supremum $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des longueurs des chaînes d'idéaux premiers $p_0 \subsetneq \ldots \subsetneq p_n$ dans R.*

Définition 10 (Sous-groupe convexe)**.**
*Un sous-groupe H d'un groupe ordonné $(G, \cdot, \leq)$ est dit **convexe** si :*

$$\forall (a,b) \in H^2,\ a \leq b,\ [a,b] \subset H \text{ où } [a,b] := \{x \in G | a \leq x \leq b\}.$$

Définition 11 (Rang)**.**
*Le **rang ou hauteur d'un groupe totalement ordonné** G est le supremum $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des longueurs des chaînes de sous-groupes convexes propres (i.e. différent de G tout entier) $H_0 \subsetneq \ldots \subsetneq H_n$ dans G. Le **rang d'une valuation** est le rang du groupe totalement ordonné de son image. Enfin le **rang d'une valeur absolue ultramétrique** est le rang de la valuation associée.*

Le rang d'une valuation v est également la dimension de Krull de l'anneau de valuation qui lui est associé. [**14**]

Définition 12 (Valuation p-adique)**.**
*La **valuation p-adique** pour un entier p premier d'un entier a est l'exposant de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers. On étend cette définition à $\mathbb{Q}$ en posant $v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.*

Remarque 4.
*v_p est une valuation discrète de rang 1 et $|\cdot|_p := p^{-v_p(\cdot)}$ est une valeur absolue ultramétrique appelée **valeur absolue p-adique**.*

Définition 13 (Corps perfectoïde)**.**
*Un **corps perfectoïde** est un corps topologique complet dont la topologie est issue d'une valuation non discrète de rang 1, dont le corps résiduel est de caractéristique positive p et tel que le morphisme de Frobenius (morphisme qui à x associe x^p) soit surjectif sur son anneau de valuation modulo p.*

Proposition 2.
Un corps K, muni d'une valuation non discrète de rang 1, de caractéristique p est un corps perfectoïde si et seulement si il est complet et parfait.

Démonstration 2.
*Voir [**7**], Proposition 13.*

Proposition 3.
Soit K un corps perfectoïde. Si L est une extension algébrique de K, alors $\widehat{L}$ est un corps perfectoïde. En particulier, toute extension algébrique finie L d'un corps perfectoïde K est perfectoïde.

Démonstration 3.
*Voir [**7**], Theorem 15 et Corollary 17.*

2.2 Basculé

Définition 14 (Basculé)**.**
*Soit K un corps perfectoïde et p la caractéristique de son corps résiduel. Le **basculé** de K est la limite projective :*

$$K^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K = \big\{(\ldots, x_2, x_1, x_0), x_i \in k, x_{i+1}^p = x_i\big\}$$

.

$$\begin{tikzcd}
 & & & K^\flat \arrow[dlll, bend right, "\pi_0"'] \arrow[dll, bend right, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[d, bend left] \\
K & K \arrow[l, leftarrow, "x\mapsto x^p"'] & K \arrow[l, leftarrow, "x\mapsto x^p"'] & \dots \arrow[l, leftarrow, "x\mapsto x^p"']
\end{tikzcd}$$

La multiplication sur $K^\flat$ s'effectue terme à terme : $(\dots, x_2, x_1, x_0)(\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, x_2y_2, x_1y_1, x_0y_0)$.
Pour l'addition, $(\dots, x_2, x_1, x_0) + (\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, z_2, z_1, z_0)$ *avec pour tout i,*
$z_i = \lim_{n\to+\infty} (x_{i+n} + y_{i+n})^{p^n}$.

La limite pour définir l'addition est prise pour la topologie p-adique, c'est-à-dire la topologie issue de la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ qui est elle-même induite par la valuation p-adique v_p, voir [**10**], Remark 8.

Exemple 1.
$\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$ *est un corps perfectoïde et son basculé est* $\widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$.
$\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ *est un corps perfectoïde et son basculé est* $\mathbb{C}_p^\flat = \widehat{\overline{\mathbb{F}_p((t))}}$.

Démonstration 4.
*Voir [**7**], Example 22 et Example 25.*

Proposition 4.
Soit K un corps perfectoïde et p la caractéristique de son corps résiduel. Le basculé de K est un corps perfectoïde de caractéristique $p > 0$.

Démonstration 5.
*Voir [**10**], Theorem 17*

Proposition 5.
Si K est un corps perfectoïde de caractéristique p, alors il est son propre basculé, i.e. $K^\flat = K$.

Démonstration 6.
Soit K un corps perfectoïde de caractéristique p. Alors d'après la proposition 2, K est parfait et donc le morphisme de Frobenius est un automorphisme de K. Ainsi par construction du basculé, $K^\flat = K$.

Proposition 6.
Soit K un corps perfectoïde. K est algébriquement clos si et seulement si $K^\flat$ l'est aussi.

Démonstration 7.
*Voir [**7**], Corollary 16 et Proposition 18.*

Théorème 1 (Fontaine et Wintenberger)**.**
Soit K un corps perfectoïde. On a un isomorphisme entre les groupes de Galois absolus de K et de son basculé $K^\flat$:

$$\mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \simeq \mathrm{Gal}({K^\flat}^{sep}/K^\flat)$$

Démonstration 8.
*Voir [**4**], Theorem 1.3.*

3 Algèbres et espaces perfectoïdes

3.1 Espaces adiques

Nous allons dans un premier temps définir les espaces adiques pour pouvoir définir par la suite les espaces perfectoïdes.

Définition 15 (Topologie I-adique)**.**
Soit R un anneau commutatif et I un idéal de R. La ***topologie I-adique*** *sur R est l'unique topologie d'anneau telle que les I^n, avec n dans $\mathbb{N}$, forment une base de voisinage de 0. Un* ***anneau adique*** *R est un anneau commutatif topologique muni d'une topologie I-adique pour un certain idéal I de R.*

On peut vérifier en effet l'existence et l'unicité d'une telle topologie.

Exemple 2.
La topologie p-adique pour p un nombre premier est précisément la topologie I-adique avec $I = (p)$. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_p$ sont des anneaux p-adiques.
La topologie 0*-adique est la topologie discrète. La topologie* 1*-adique est la topologie grossière.*

Démonstration 9.
*Voir [**5**], Exemple 1.4 et Exemple 1.9.*

Définition 16 (Anneau de Huber)**.**
Un ***anneau de Huber*** *R est un anneau topologique commutatif qui possède un sous-anneau ouvert I-adique (appelé anneau de définition de R) pour un idéal I de type fini (appelé idéal de définition de R).*

Exemple 3.
$\mathbb{Q}$ *est un anneau de Huber et* $\mathbb{Z}$ *est son anneau de définition.*
$\mathbb{Q}_p$ *est un anneau de Huber,* $\mathbb{Z}_p$ *est son anneau de définition et (p) est son idéal de définition.*

Démonstration 10.
*Voir [**5**], Exemple 1.6 et Exemple 1.9.*

Définition 17 (Élément borné en puissances)**.**
Un ***élément borné en puissances*** *d'un anneau topologique R est un élément $\varpi \in R$ tel que pour tout voisinage U de 0, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varpi^n V \subset U$.*

L'ensemble des éléments bornés en puissances d'un anneau topologique R est un sous-anneau que l'on notera R°, voir [**5**], Définition 1.10.

Définition 18 (Anneau uniforme)**.**
Un ***anneau uniforme*** *R est un anneau topologique tel que R° soit borné.*

Définition 19 (Élément topologiquement nilpotent)**.**
Un ***élément topologiquement nilpotent*** *ϖ d'un anneau topologique R est un élément tel que* $\varpi^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les éléments topologiquement nilpotents sont bornés en puissances.

Définition 20 (Pseudo-uniformisante et anneau de Tate)**.**
*Une **pseudo-uniformisante** ϖ d'un anneau topologique R est un élément topologiquement nilpotent qui est inversible. Un **anneau de Tate** est un anneau de Huber possédant une pseudo-uniformisante.*

Exemple 4.
$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_p$ sont des anneaux de Tate, munis de la topologie p-adique pour p un nombre premier, dont p est une pseudo-uniformisante.

Démonstration 11.
*Voir [**5**], Exemple 1.12.*

Définition 21 (Anneau des éléments entiers)**.**
*Un **anneau d'éléments entiers** d'un anneau commutatif topologique R est un sous-anneau ouvert et intégralement clos du sous-anneau R° des éléments bornés en puissances de R.*

Définition 22 (Paire de Huber)**.**
*On note R^+ un anneau d'éléments entiers d'un anneau de Huber R. Une **paire de Huber** est un couple (R, R^+) pour un anneau de Huber R. Si R est un anneau de Tate, on parle de **paire de Tate**.*

Exemple 5.
$(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ est une paire de Tate.

Démonstration 12.
*Voir [**5**], Exemple 1.15.*

Définition 23 (Équivalence de valuation)**.**
*Soit R un anneau et G_1 et G_2 deux groupes abéliens totalement ordonnés. Deux valuations $v_1 : R \to G_1 \cup \{+\infty\}$ et $v_2 : R \to G_2 \cup \{+\infty\}$ sont dites **équivalentes** s'il existe des morphismes de groupes ordonnés injectifs $f_1 : G_1 \hookrightarrow H$ et $f_2 : G_2 \hookrightarrow H$ tels que $f_1 \circ v_1 = f_2 \circ v_2$ avec H un groupe abélien totalement ordonné.*

Cela définit une relation d'équivalence $\sim$ sur les valuations d'un anneau de Huber,voir [**5**], Définition 2.1.

Définition 24 (Spectre adique)**.**
*Le **spectre adique** d'une paire de Huber (A, A^+) est l'ensemble des classes d'équivalence de valuations continues sur A et positives sur A^+.*

On note $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ le spectre adique de la paire de Huber (A, A^+).

Définition 25 (Domaine rationnel)**.**
*Soit (A, A^+) une paire de Huber. On note $X := \mathrm{Spa}(A, A^+)$. Un **domaine rationnel** de A est un ensemble de la forme :*

$$R\left(\frac{f_1, ..., f_n}{g}\right) := \{v \in X | \forall i \in [\![1; n]\!], v(f_i) \geq v(g) \neq +\infty\} = \{v \in X | \forall i \in [\![1; n]\!], |f_i|_v \leq |g|_v \neq 0\}$$

avec $(f_1, ..., f_n) \in A^n$ qui engendrent un idéal ouvert de A et $g \in A$.

On munit $X := \mathrm{Spa}(A, A^+)$ de la topologie engendrée par ses domaines rationnels, voir [**4**], Definition 2.7.

Définition 26 ($\mathscr{O}_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}$).
Soit $X := \mathrm{Spa}(A, A^+)$ *un spectre adique et* $\mathscr{B}$ *l'ensemble des domaines rationnels de* X *qui est donc une base d'ouverts. On désigne par* $\mathscr{F}_0$ *le* $\mathscr{B}$*-faisceau qui à* $U = R\left(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g}\right)$ *associe*
$\mathscr{O}_X(U) = A[\widehat{\frac{f_1}{g}, ..., \frac{f_n}{g}}]$. *On crée ensuite un préfaisceau* $\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{\mathrm{Spa}(A,A^+)}$ *tel que pour tout ouvert* U *de* X *:*

$$\mathscr{O}_X(U) = \varprojlim_{V \subset U,\ V \in \mathscr{B}} \mathscr{F}_0(V).$$

Un préfaisceau $\mathscr{O}_X$ ainsi créé n'est pas toujours un faisceau, voir [**4**], Proposition 2.15, mais c'est le cas si (A, A^+) est une algèbre perfectoïde affinoïde, voir [**4**], Theorem 6.3 et $\mathscr{O}_X$ est alors unique.

Définition 27 (Espace topologiquement annelé valué).
Un ***espace annelé valué*** *est un espace localement annelé* $(X, \mathscr{O}_X)$ *dont l'anneau des germes* $\mathscr{O}_{X,x}$ *en tout point* x *de* X *est doté d'une classe d'équivalence de valuations* v_x *dont le support est exactement l'unique idéal maximal* $m_{X,x}$ *de* $\mathscr{O}_{X,x}$*. Un* ***espace topologiquement annelé valué*** *est un espace annelé valué qui est un espace topologiquement annelé.*

Définition 28 (Espace adique).
Un ***espace adique affinoïde*** *est un espace topologiquement annelé valué qui est isomorphe* à $(\mathrm{Spa}(A, A^+), \mathscr{O}_{\mathrm{Spa}(A,A^+)})$ *où* (A, A^+) *est une paire de Huber. Si* (A, A^+) *est une paire de Tate, on parle d'****espace adique affinoïde analytique****. Un* ***espace adique*** *est un espace topologiquement annelé valué qui admet un recouvrement par des ouverts qui sont des espaces adiques affinoïdes. Si les ouverts du recouvrement sont des espaces adiques affinoïdes analytiques, on parle d'****espace adique analytique****.*

3.2 Structures perfectoïdes

Définition 29 (Algèbre perfectoïde).
Une ***K-algèbre perfectoïde*** A *est une* K*-algèbre de Banach (i.e. le* K*-espace vectoriel sous-jacent est un espace de Banach) sur un corps perfectoïde* K *telle que l'ensemble des éléments bornés en puissances* A° *est ouvert et borné et telle que le morphisme de Frobenius* $\varphi : A^\circ/(p) \to A^\circ/(p)$ *soit surjectif.*

Théorème 2 (Équivalence du basculement).
Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des K*-algèbres perfectoïdes et la catégorie des* $K^\flat$*-algèbres perfectoïdes.*

Démonstration 13.
*Voir [**4**], Theorem 1.7.*

Définition 30 (Algèbre affinoïde et algèbre perfectoïde affinoïde).
Soit K *un corps. Une* K*-****algèbre affinoïde*** (A, A^+) *est une paire de Tate telle que* A *soit une* K*-algèbre. Soit* K *un corps perfectoïde. Une* K*-****algèbre perfectoïde affinoïde*** (A, A^+) *est une paire de Tate telle que* A *soit une* K*-algèbre perfectoïde.*

Définition 31 (Espace perfectoïde).
Un ***espace perfectoïde affinoïde*** X *sur un corps perfectoïde* K *est un espace adique affinoïde analytique isomorphe* à $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ *où* (A, A^+) *est une* K*-algèbre perfectoïde affinoïde. Un* ***espace perfectoïde*** X *sur un corps perfectoïde* K *est un espace adique analytique qui est localement isomorphe* à *un espace perfectoïde affinoïde.*

Théorème 3.
Le foncteur basculement $(-)^\flat$ *induit une équivalence de catégories entre les espaces perfectoïdes sur* K *et les espaces perfectoïdes sur* $K^\flat$*.*

Démonstration 14.
*Voir [**4**], Theorem 1.9.*

Peter Scholze a également formulé une généralisation du « Théorème de presque pureté de Faltings », voir [**4**], Theorem 1.10.

4 Annexe

4.1 Vocabulaire de la théorie de Galois

Définition 32 (Extension algébrique)**.**
*Une **extension de corps** L d'un corps K est un corps L qui contient K comme sous-corps. Une **extension algébrique** L d'un corps K est une extension de corps dans laquelle tous les éléments sont algébriques sur K, c'est-à-dire sont racines d'un polynôme non nul à coefficients dans K. Une **clôture algébrique** d'un corps K est une extension algébrique et maximale au sens de l'inclusion.*

Toutes les clôtures algébriques d'un corps K sont isomorphes entre-elles. [**15**]
On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K.

Définition 33 (Extension séparable)**.**
*Une **extension séparable** sur un corps K est une extension de corps algébrique L/K tel que le polynôme minimal à coefficients dans K de tout élément de L n'admet que des racines simples. Un **corps parfait** est un corps K tel que toutes ses extensions algébriques soient séparables. Une **clôture séparable** d'un corps K est une extension algébrique séparable et maximale pour l'inclusion.*

Comme pour les clôtures algébriques, toutes les clôtures séparables d'un corps K sont isomorphes entre-elles. [**17**]
On note K^{sep} une clôture séparable de K.

Proposition 7.
*Un corps K est parfait si et seulement s'il est de caractéristique nulle ou, s'il est de caractéristique $p > 0$, si le morphisme de Frobenius, qui à x associe x^p, est surjectif. [**16**]*

Définition 34 (Groupe de Galois)**.**
*Le **groupe de Galois** d'une extension de corps L/K est le groupe des automorphismes de corps de L qui sont K-linéaires ou de façon équivalente tels que leurs restrictions à K soit l'identité de K.*
On le note $Gal(L/K)$.
*Le **groupe de Galois absolu** de K est le groupe de Galois d'une clôture séparable de K.*

4.2 Vocabulaire sur les éléments entiers

Définition 35 (Élément entier)**.**
*Un **élément entier** sur un anneau commutatif A est un élément b d'une A-algèbre B (c'est-à-dire un anneau commutatif B muni d'un morphisme d'anneaux de A dans B) tel qu'il existe un polynôme à coefficients dans A s'annulant en b. La **fermeture intégrale** de A dans B est l'ensemble des éléments de B entiers sur A. La **clôture intégrale** d'un anneau intègre R est la fermeture intégrale de R dans son corps des fractions K. Un **anneau intégralement clos ou intégralement fermé** R est un anneau intègre qui est égal à sa clôture intégrale.*

La fermeture intégrale de A dans B est une A-sous-algèbre de B. [**18**].

4.3 Vocabulaire de la théorie des catégories

Définition 36 (Catégorie)**.**
*Une **catégorie** $\mathscr{C}$ est la donnée de :*

1. *une classe* $\mathrm{ob}(\mathscr{C})$ *dont les éléments sont appelés objets.*

2. *une classe* $\mathrm{mor}(\mathscr{C})$ *dont les éléments sont appelés morphismes ou flèches. Chaque morphisme f de* $\mathrm{mor}(\mathscr{C})$ *a une source A et un but B qui sont des objets de $\mathscr{C}$. On note* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *la classe de tous les morphismes de source A et de but B.*

3. *pour chaque objet A de $\mathscr{C}$, un morphisme de* $\mathrm{Hom}(A, A)$ *appelé identité de A et noté* id_A.

4. *une composition $\circ$ qui, à tout couple de morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$, associe un morphisme $g \circ f : A \to C$ appelé composé de f et g. Cette composition est de plus associative, i.e. pour tous morphismes $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, et les identités sont des éléments neutres de la composition, i.e. pour tout morphisme $f : A \to B$, $\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$.*

Définition 37 (Isomorphisme)**.**
*Un **isomorphisme** d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un morphisme $f : A \to B$ tel qu'il existe un morphisme $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

Définition 38 (Catégorie duale)**.**
*La **catégorie duale** ou catégorie opposée d'une catégorie $\mathscr{C}$, notée $\mathscr{C}^{op}$ ou $\mathscr{C}^{o}$, est la catégorie en prenant les mêmes objets et morphismes que $\mathscr{C}$ mais en inversant la source et le but de chaque morphisme et en remplaçant la composition par son « symétrique » : $f \circ^{op} g = f \circ g$.*

Définition 39 (Foncteur)**.**
*Un **foncteur** covariant F d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une une catégorie $\mathscr{D}$ est la donnée de :*

1. *pour tout objet X de $\mathscr{C}$, un objet de $\mathscr{D}$, noté $F(X)$ ou F_X.*

2. *pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathscr{C}$, un morphisme de $\mathscr{D}$, noté $F(f)$ ou F_f, de source $F(X)$ et de but $F(Y)$.*

Tels que :

- *pour tout objet X de $\mathscr{C}$, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.*

- *pour tout couple de morphismes composables (f, g) de $\mathscr{C}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

*Un **foncteur contravariant** d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une une catégorie $\mathscr{D}$ est un foncteur covariant de $\mathscr{C}^{op}$ dans $\mathscr{D}$.*

Définition 40 (Isomorphisme de catégories)**.**
*Un **isomorphisme de catégories** est un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tel qu'il existe un foncteur $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tel que $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ et $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ où $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ désigne le foncteur identité de $\mathscr{C}$ qui à tout objet X de $\mathscr{C}$ l'associe à lui-même et à tout morphisme f de $\mathscr{C}$ l'associe à lui-même.*

Définition 41 (Transformation naturelle)**.**
*Une **transformation naturelle** η d'un foncteur $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ vers un foncteur $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathscr{C}$, d'un morphisme de $\mathscr{D}$ $\eta_X : F(X) \to G(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$, on ait $\eta_X \circ F(f) = \eta_Y \circ G(f)$.*

Définition 42 (Isomorphisme naturel).
*Un **isomorphisme naturel** ou isomorphisme de foncteurs est une transformation naturelle telle que* η_X *soit un isomorphisme pour tout objet* X *de* $\mathscr{C}$*.*

Définition 43 (Équivalence de catégories).
*Une **équivalence de catégories** est un foncteur* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *s'il existe un foncteur* $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ *et un isomorphisme naturel entre* $G \circ F$ *et* $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ *et un second entre* $F \circ G$ *et* $\mathrm{id}_{\mathscr{D}}$*.*

Définition 44 (Système projectif).
Soit $(I, \leq)$ *un ensemble ordonné. Un **système projectif** d'objets d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *indexée par un ensemble* I *est la donnée d'une famille* $(X_i)_{i\in I}$ *d'objets de* $\mathscr{C}$ *et de morphismes* $f_i^j : X_i \to X_j$ *pour chaque couple d'indices* $(i,j) \in I^2$ *tel que* $i \leq j$*, le tout vérifiant* $\forall i \in I$*,* $f_i^i = \mathrm{id}_{X_i}$ *et* $\forall (i,j,k) \in I^3$*,* $i \leq j \leq k$*,* $f_i^j \circ f_j^k = f_i^k$*.*

Définition 45 (Limite projective).
*Une **limite projective** d'un système projectif* $(X_i, f_i^j)_{(i,j)\in I^2, i\leq j}$ *dans une catégorie* $\mathscr{C}$*, notée* $\varprojlim X_i$*, est la donnée d'un objet* X *de* $\mathscr{C}$ *et de morphisme* $\pi_i : X \to X_i$ *pour tout* $i \in I$ *vérifiant les relations de compatibilité* $\pi_i = f_i^j \circ \pi_j$ *et tel que pour tout autre objet* Y *muni d'une famille de morphismes* $\varphi_i : Y \to X_i$ *pour tout* $i \in I$ *vérifiant les mêmes relations de compatibilité que les* π_i*, il existe un unique morphisme* $u : Y \to X$ *tel que* $\varphi_i = \pi_i \circ u$ *pour tout* $i \in I$*.*

Définition 46 (Système inductif).
Soit $(I, \leq)$ *un ensemble ordonné. Un **système inductif** d'objets d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *indexée par un ensemble* I *est la donnée d'une famille* $(X_i)_{i\in I}$ *d'objets de* $\mathscr{C}$ *et de morphismes* $f_i^j : X_i \to X_j$ *pour chaque couple d'indices* $(i,j) \in I^2$ *tel que* $i \leq j$*, le tout vérifiant* $\forall i \in I$*,* $f_i^i = \mathrm{id}_{X_i}$ *et* $\forall (i,j,k) \in I^3$*,* $i \leq j \leq k$*,* $f_j^k \circ f_i^j = f_i^k$*.*

Définition 47 (Limite inductive).
*Une **limite inductive** d'un système inductif* $(X_i, f_i^j)_{(i,j)\in I^2, i\leq j}$ *dans une catégorie* $\mathscr{C}$*, notée* $\varinjlim X_i$*, est la donnée d'un objet* X *de* $\mathscr{C}$ *et de morphisme* $\iota_i : X_i \to X$ *pour tout* $i \in I$ *vérifiant les relations de compatibilité* $\iota_i = \iota_j \circ f_i^j$ *et tel que pour tout autre objet* Y *muni d'une famille de morphismes* $\varphi_i : X_i \to Y$ *pour tout* $i \in I$ *vérifiant les mêmes relations de compatibilité que les* ι_i*, il existe un unique morphisme* $u : X \to Y$ *tel que* $\varphi_i = u \circ \iota_i$ *pour tout* $i \in I$*.*

4.4 Vocabulaire de la théorie des faisceaux

Définition 48 (Préfaisceau).
*Un **préfaisceau*** $\mathscr{F}$ *d'une catégorie* $\mathscr{C}$ *sur un espace topologique* X *est la donnée de :*

1. *pour tout ouvert* U *de* X*, un objet* $\mathscr{F}(U)$ *de* $\mathscr{C}$ *appelé objet des sections de* $\mathscr{F}$ *au dessus de* U*.*

2. *pour tout ouvert* U *inclus dans* V *de* X*, un morphisme de* $\mathscr{C}$ $res_{U,V} : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ *appelé morphisme de restristion de* V *sur* U*.*

Tels que :

- *pour tout ouvert* U *de* X*,* $res_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$*.*

- *pour toutes inclusions d'ouverts* $U \subset V \subset W$ *de* X*,* $res_{V,W} \circ res_{U,V} = res_{U,W}$*.*

$\mathscr{F}(X)$ *est appelé objet des sections globales.*

Un préfaisceau est donc un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts de X, notée $\mathrm{Ouv}(X)$, dont les morphismes sont les inclusions, dans une catégorie $\mathscr{C}$.

Définition 49 (Faisceau)**.**
*Un **faisceau d'ensembles** $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X est un préfaisceau de la catégorie des ensembles tel que pour tout ouvert U de X, réunion d'une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et pour toute famille $(s_i)_{i\in I}$ de sections de $\mathscr{F}$ sur les ouverts $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ pour tout $(i,j) \in I^2$, il existe une unique section s de $\mathscr{F}$ sur U telle que $s|_{U_i} = s_i$. Un **faisceau** $\mathscr{F}$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ sur un espace topologique X est un préfaisceau tel que pour tout objet T de $\mathscr{C}$, $\mathscr{F}_T : U \mapsto Hom_{\mathscr{C}}(T, \mathscr{F}(U))$ soit un faisceau d'ensembles.*

Définition 50 (Fibre et germe)**.**
*Soit X un espace topologique et $\mathscr{F}$ un préfaisceau d'une catégorie $\mathscr{C}$ sur un espace topologique X. La **fibre** de $\mathscr{F}$ en $x \in X$ est la limite inductive $\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x\in U} \mathscr{F}(U)$ sur tous les ouverts contenant x. Un **germe** s_x d'une section s en un point x est l'image de s dans la fibre $\mathscr{F}_x$.*

Définition 51 ($\mathscr{B}$-faisceau)**.**
*Soit $\mathscr{B}$ une base d'ouvert d'un espace topologique X. Un **$\mathscr{B}$-faisceau** $\mathscr{F}_0$ est la donnée de :*

1. *pour tout ouvert U de $\mathscr{B}$, un ensemble $\mathscr{F}_0(U)$.*

2. *pour tout ouvert U inclus dans V de $\mathscr{B}$, une application de restriction $\mathscr{C}$ $res_{U,V} : \mathscr{F}_0(V) \to \mathscr{F}_0(U)$.*

Tels que :

- *pour tout ouvert U de $\mathscr{B}$, $res_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$.*

- *pour toutes inclusions d'ouverts $U \subset V \subset W$ de $\mathscr{B}$, $res_{V,W} \circ res_{U,V} = res_{U,W}$.*

- *pour tout ouvert U de $\mathscr{B}$, réunion d'une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$, et pour toute famille $(s_i)_{i\in I}$ de sections de $\mathscr{F}_0$ sur les ouverts $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ pour tout $(i,j) \in I^2$, il existe une unique section s de $\mathscr{F}_0$ sur U telle que $s|_{U_i} = s_i$.*

Proposition 8.
Soit X un espace topologique, $\mathscr{B}$ une base d'ouverts de X et $\mathscr{F}_0$ un $\mathscr{B}$-faisceau. Pour tout ouvert U de X, on note $\mathscr{F}(U) = \varprojlim_{V\subset U,\ V\in\mathscr{B}} \mathscr{F}(V)$. Alors $\mathscr{F}$ est l'unique faisceau tel que $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}_0(U)$ pour tout ouvert $U \in \mathscr{B}$.

Démonstration 15.
*Voir [**19**], Proposition 5.1.3.*

4.5 Vocabulaire sur les espaces annelés

Définition 52 (Espace annelé)**.**
*Un **espace annelé** est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_X$. Un **espace topologiquement annelé** est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_X$.*

Définition 53 (Espace localement annelé)**.**
*Un **espace localement annelé** est un espace annelé $(X, \mathscr{O}_X)$ tel qu'en tout point x de X l'anneau des germes $\mathscr{O}_{X,x}$ soit un anneau local. Un **espace topologiquement localement annelé** est un espace localement annelé qui est un espace topologiquement annelé.*

Références

[1] B. Le Stum, *Raconte moi un perfectoïde*, La Gazette des mathématiciens 154 (octobre 2017)

[2] B. Le Stum, *Qu'est-ce qu'un perfectoïde ?*, Diapositive pour un séminaire, 2017, https ://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Documents_files/PerfVid.pdf

[3] B. Bhatt, *What is ... a Perfectoid Space ?*, Publication pour l'AMS, volume 61, numéro 9, 2014, https ://www.ams.org/notices/201409/rnoti-p1082.pdf

[4] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, tome 116, pages 245-313, 2012, http ://www.numdam.org/item/10.1007/s10240-012-0042-x.pdf

[5] D. Berger, *Introduction aux espaces perfectoïdes*, Séminaire des Jeunes Chercheurs du LMNO, 2019, https ://berger191.users.lmno.cnrs.fr/Notes/Introduction%20aux%20espaces%20perfecto%C3%AFdes.pdf

[6] M. Morrow, *Foundations of perfectoid spaces*, IMJ–PRG spécialisé pour un cours de M2, 2017, https ://www.math.ias.edu/∼lurie/ffcurve/Lecture6-8-Perfectoid.pdf

[7] E. Shahoseini and S. Pasandideh, *An Introduction to Perfectoid Fields*, Twopole DRP, 2021, https ://arxiv.org/pdf/2112.13265.pdf

[8] B. Le Stum, *Rigid cohomology of locally noetherian formal schemes. Part 1 : Geometry*, Prépublication de l'IRMAR, 2022, https ://arxiv.org/pdf/1707.02797v2.pdf

[9] B. Le Stum, *Géométrie Algébrique (Schémas/Espaces adiques)*, Notes de cours de M2, 2019, https ://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/bernard.le-stum/Documents_files/EspacesValBook.pdf

[10] J. Lurie, *Tilting*, Notes de cours, 2018, https ://www.math.ias.edu/∼lurie/205notes/Lecture2-Tilting.pdf

[11] Wikipedia en *Perfectoid space* https ://en.wikipedia.org/wiki/Perfectoid_space

[12] Wikipedia en *Valuation (algebra)* https ://en.wikipedia.org/wiki/Valuation_(algebra)

[13] Wikipedia fr *Valuation* https ://fr.wikipedia.org/wiki/Valuation

[14] Wikipedia en *Valuation ring* https ://en.wikipedia.org/wiki/Valuation_ring

[15] Wikipedia fr *Clôture algébrique* https ://fr.wikipedia.org/wiki/Cl%C3%B4ture_alg%C3%A9brique

[16] Wikipedia fr *Extension séparable* https ://fr.wikipedia.org/wiki/Extension_s%C3%A9parable

[17] Wikipedia fr *Clôture séparable* https ://fr.wikipedia.org/wiki/Cl%C3%B4ture_s%C3%A9parable

[18] Wikipedia fr *Élément entier* https ://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89l%C3%A9ment_entier#Fermeture_et_cl%C3%

[19] M. Romagny *Géométrie algébrique et cohomologie*, Notes de cours de M2, 2023, https ://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/M2_2324/1116_cours.pdf