3.5 Exercices (11 mars 2025)

Exercice 3.1 Dire dans chaque cas si l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire :

1. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+2y \\ x \end{bmatrix}$,
2. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+2z \\ 2x+3 \end{bmatrix}$,
3. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ xz \end{bmatrix}$.

Exercice 3.2 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.3 Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-3z \\ -x+3y-6z \end{bmatrix}$ et $\vec{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Calculer $f(\vec{u})$. Trouver une matrice A telle que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Calculer $A\vec{u}$.

Exercice 3.4 Déterminer la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtenue en faisant une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine suivie d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

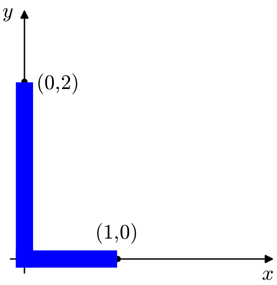
Exercice 3.5 Déterminer la matrice A dans la base canonique de la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine. Calculer A^3. Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 3.6 On considère les situations suivantes :

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,
5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

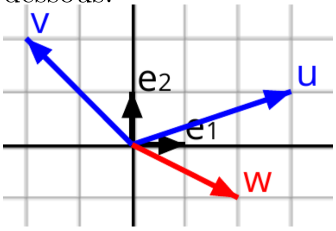
Déterminer dans chaque cas

1. l'effet de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à la matrice A sur la lettre L ci-contre et donner une caractérisation géométrique de f,
2. l'effet de f^{-1} sur L lorsque f est inversible ainsi qu'une caractérisation géométrique.

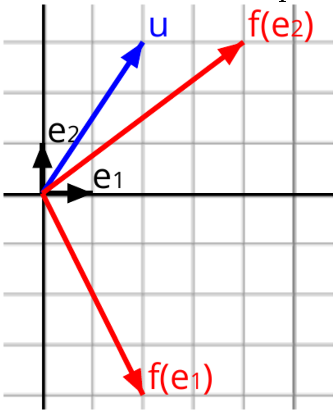


Exercice 3.7 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

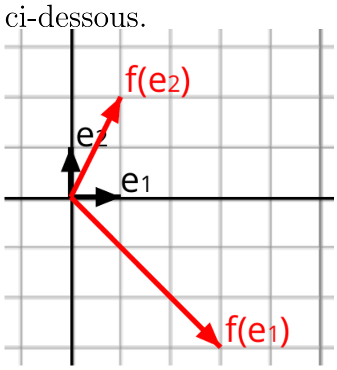
(a) Trouver les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer $f(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

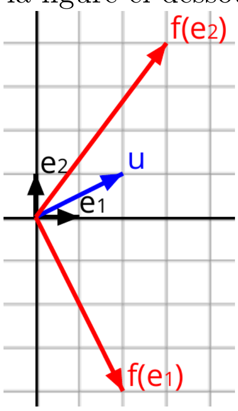


(c) Déterminer la matrice de f dans la base canonique avec la figure ci-dessous.

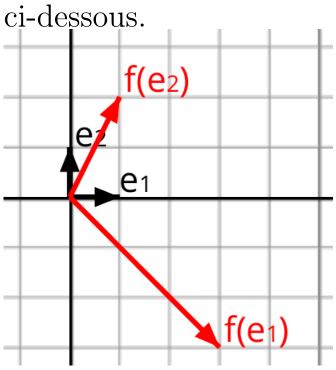


Exercice 3.8 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

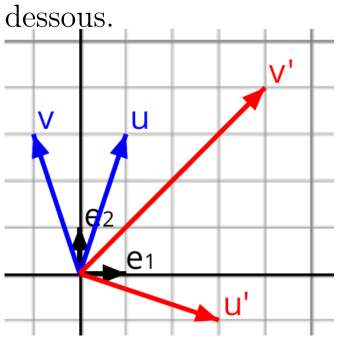
(a) Déterminer $f^{-1}(\vec{u})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base canonique sur la figure ci-dessous.

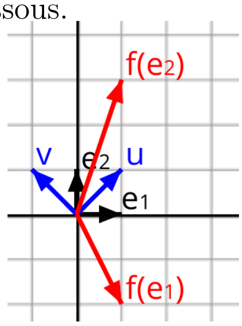


(c) Déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{u}, \vec{v})$ à la base $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ avec la figure ci-dessous.

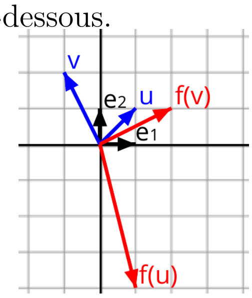


Exercice 3.9 On se donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

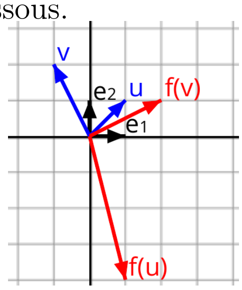
(a) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



(b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique sur la figure ci-dessous.



(c) Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la figure ci-dessous.



Exercice 3.10 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x$, $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

1. Déterminer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ ainsi que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse.
3. En déduire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 3.11 Soient $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à A.

1. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et son inverse.
2. Déterminer $f(\vec{v}_1)$ et $f(\vec{v}_2)$.
3. Quelles sont les coordonnées de $f(\vec{v}_1)$ et de $f(\vec{v}_2)$ dans la base $\mathcal{B}$?
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de deux façons différentes.
5. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'unique application linéaire telle que
$$g(\vec{v}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad g(\vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$
Déterminer la matrice de g dans la base canonique.

Exercice 3.12 Soient
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\det(A)$ par un produit en croix.

2. Calculer $\det(B)$ avec la règle de Sarrus.
3. Calculer $\det(C)$ en développant selon la troisième ligne.
4. Calculer $\det(D)$ en développant selon la seconde colonne.
5. Calculer $\det(E)$ en par opérations élémentaires sur les lignes.

Exercice 3.13 On considère les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 230 & 728 & 230 & 432 \\ 1301 & 315 & 1301 & 539 \\ 5\pi & 52 & 5\pi & 7\sqrt{2} \\ -22 & 45 & -22 & 18 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & \pi & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Que valent les déterminants de A, B et C.
2. Que valent les déterminants de BC, C^2, C^{-1} et $2C$.

Exercice 3.14 Pour quelles valeurs de λ la matrice est-elle inversible ?

1. $\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,
2. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 3.15 Soient $A = \begin{bmatrix} -11 & 10 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de A.
2. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer P^{-1} et vérifier que $D = P^{-1}AP$.

Exercice 3.16 Diagonaliser si possible

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
2. $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Autrement dit :

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une base formée de vecteurs propres pour A.
4. Trouver P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
5. (facultatif) Calculer P^{-1} et vérifier.