4.5 Exercices

4.5.1 Algèbre linéaire

Exercice 4.1 — . 1. Soit $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ une suite exacte courte de groupes abéliens. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) il existe une *section* (un morphisme $s : M'' \to M$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$),
   (b) il existe une *rétraction* (un morphisme $r : M \to M'$ telle que $r \circ i = \mathrm{Id}_{M'}$).
2. On dit alors que la suite est *scindée*. Montrer que, dans ce cas, $M \simeq M' \oplus M''$.
3. Montrer que si M'' est libre alors la suite est toujours scindée.
4. Montrer que si M' est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, alors la suite est toujours scindée.
5. Montrer que la suite $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ est une suite exacte courte qui n'est pas scindée.

Exercice 4.2 1. Calculer l'homologie du complexe (concentré en degrés 0 et 1)

$$\mathbb{Z}e \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v.$$

2. Calculer l'homologie du complexe (concentré en degrés 0 et 1 et 2)

$$\mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau \xrightarrow{d} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{0} \mathbb{Z}v$$

avec $d(\sigma) = d(\tau) = a - c + b$.

Exercice 4.3 — . 1. Montrer que si $f \sim g : C \to C'$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_n(f) = \mathrm{H}_n(g)$.
2. En déduire que si $f : C \sim C'$ est une équivalence d'homotopie, alors f est un quasi-isomorphisme.

Exercice 4.4 — . Montrer le *lemme du serpent* : Si

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "j"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif à lignes exactes, alors il existe une suite exacte

$$0 \to \ker f' \to \ker f \to \ker f'' \to \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'' \to 0.$$

Exercice 4.5 — . Montrer que si

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D' \arrow[r, "j"] & D \arrow[r, "q"] & D'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est un *morphisme de suites exactes courtes*, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_n(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_n(C'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n-1}(C') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n-1}(C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_n(D) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(D'') \arrow[r, "\delta_n"] & \mathrm{H}_{n-1}(D') \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(D) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

4.5.2 Ensemble semi-simplicial

Exercice 4.6
1. Représenter Δ^n pour $n = 0, 1, 2, 3$.
2. Quel est le nombre de faces de dimensions k dans Δ^n ?
3. Montrer que $\Delta^n \simeq \mathbb{B}^n$ et que $\partial\Delta^n \simeq \mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 4.7
1. Montrer qu'il existe une unique structure d'ensemble semi-simplicial telle que $S_0 = \{v\}, S_1 = \{e\}$ et $S_n = \varnothing$ pour $n \geqslant 2$. Calculer $\mathrm{H}_n(S)$. Vérifiez la formule d'Euler-Poincaré.
2. On pose $S_0 = \{v\}, S_1 = \{a, b, c\}$, $S_2 = \{\sigma, \tau\}$ et

$$d_0^2(\sigma) = b, d_1^2(\sigma) = c, d_2^2(\sigma) = a \quad \text{et} \quad d_0^2(\tau) = a, d_1^2(\tau) = c, d_2^2(\tau) = b.$$

Calculer $\mathrm{H}_n(S)$. Vérifiez la formule d'Euler-Poincaré.

4.5.3 Homologie singulière

Exercice 4.8 Montrer (par un calcul) qu'un point est acyclique.

Exercice 4.9 Soient X un espace topologique et $f, f' \in S_1(X)$ avec $\mathrm{d}_0(f) = \mathrm{d}_0(f') = y$ et $\mathrm{d}_1(f) = \mathrm{d}_1(f') = x$. On dit que $\sigma \in S_2(X)$ est une *homotopie* entre f et f' si $\mathrm{d}_0(\sigma) = y$, $\mathrm{d}_1(\sigma) = f'$ et $\mathrm{d}_2(\sigma) = f$:

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \\
x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f'"'] & {} & y.
\end{tikzcd}$$

On considère les applications

$$\pi_1 : [0,1] \to \Delta_1, t \to (1-t, t), \quad \pi_2 : [0,1]^2 \to \Delta_2, (t, s) \to (1-t, (1-s)t, ts).$$

Montrer que σ est une homotopie entres f et f' si et seulement si $h := \sigma \circ \pi_2$ est une homotopie à extrémités fixées entre $\gamma := f \circ \pi_1$ et $\gamma' := f' \circ \pi_1$.

Exercice 4.10 Soit $X = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
1. Calculer $\mathrm{H}_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $Y = X \backslash \{\pm i\}$. Calculer $\mathrm{H}_n(Y)$ pour tout $n \leqslant 1$.
3. On pose $Z = X \backslash \{\pm i, \pm 2i\}$. Calculer $\mathrm{H}_n(Y)$ pour tout $n \leqslant 1$.

4.5.4 Mayer-Vietoris

Exercice 4.11
1. Montrer que si, pour $i = 1, 2$, (X_i, x_i) est un espace pointé tel que x_i est un rétract par déformation d'un ouvert de X_i, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\widetilde{\mathrm{H}}_n(X_1 \vee X_2) \simeq \widetilde{\mathrm{H}}_n(X_1) \oplus \widetilde{\mathrm{H}}_n(X_2).$$
2. En déduire $\mathrm{H}_n(\mathbb{S} \vee \mathbb{S})$.

Exercice 4.12
1. Calculer $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}\backslash\{1\} \times \mathbb{S})$, $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}\backslash\{-1\} \times \mathbb{S})$ et $\mathrm{H}_n(\mathbb{S}\backslash\{1, -1\} \times \mathbb{S})$.
2. En déduire $\mathrm{H}_n(\mathbb{T}^2)$.

Exercice 4.13 Calculer $\mathrm{H}_k(\mathbb{P}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \leqslant 3$. On admettra (ou on montrera) que $\mathbb{P}^n = X_1 \cup X_2$ avec X_1, X_2 ouverts dans $\mathbb{P}^n$, $X_1 \simeq \mathring{\mathbb{B}}^n$, et que l'inclusion $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$ s'identifie à homotopie près avec la projection $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$.