$\boxed{\text{Théorème de Bézout}}$

Table des matières

1 Ensemble algébrique

1.1 Ensemble algébrique

Soit k un corps.
Pour $A \subset k[X_1, ..., X_n]$, on note (A) l'idéal engendré par A.

Définition 0.1. *Soit $S \subset k[X_1, ..., X_n]$ un ensemble de polynômes. On pose*

$$V(S) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n(k), \forall P \in S, P(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

*Un ensemble de la forme $V(S)$ est appelé un **ensemble algébrique affine**.*

Si $F \in k[X_1, ..., X_n]$, on écrit $V := V(F)$ et on dit que V une *hypersurface* affine. Lorsque $\deg(F) = 1$, on dit que V est un *hyperplan* affine. Lorsque $n = 2$, pour hypersurface (resp. hyperplan), on dit aussi *courbe plane* (resp. *droite du plan*).
On notera parfois $\mathbb{A}^n$ en omettant le corps k lorsque le contexte le permet. Soit A un anneau intègre, $I \subset A$ une partie de A et $x \in A$. Et on définit : $I \cdot J = \{xy, (x, y) \in I \times J\}$. De plus si $A = k[X_1, ..., X_n]$ alors pour $x \in \mathbb{A}^n$ on pose $I(x) = \{P(x), P \in I\}$. Si $I(x) = \{0\}$ on va juste écrire $I(x) = 0$. On remarque que $x \in V(I) \iff I(x) = 0$. De plus puisque $P \mapsto P(x)$ est un morphisme surjectif d'anneaux $(C)(x) = (C(x))$. Donc $I(x)$ est 0 ou k et $(C \cdot D)(x) = (C(x) \cdot D(x))$, pour C et D des parties de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Lemme 0.1. *Soit A un anneau intègre et $I, J \subset A$.*

$$I \cdot J = 0 \iff I = 0 \vee J = 0$$

Preuve : Bien sûr si $I = 0$ ou $J = 0$ alors $I \cdot J = 0$. Supposons maintenant que $I \cdot J = 0$. Supposons de plus qu'il existe $x \in I$ tel que $x \neq 0$, i.e. $I \neq 0$. Puisque $I \cdot J = 0$, pour tout $y \in J$, $xy \in I \cdot J = 0$. Donc $xy = 0$. Or A est intègre et $x \neq 0$, donc $y = 0$. Ainsi $J = 0$. □

Proposition 1.1. *Soit $S \subset k[X_1, ..., X_n]$ et I l'idéal engendré par S. Soit (J_i) une famille d'idéaux quelconque et J un idéal.*

1. *$V(S) = V(I)$*
2. *$V(IJ) = V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$*
3. *$V(\cup_i J_i) = \cap_i V(J_i)$*
4. *Si $J \subset I$ alors $V(I) \subset V(J)$.*

Preuve : Soit $x \in \mathbb{A}^n$. Puisque $(S(x)) = I(x)$, $S(x) = 0 \iff I(x) = 0$ donc $V(I) = V(S)$. Puisque $(I(x) \cdot J(x)) = (I \cdot J)(x) = (IJ)(x)$,

$$x \in V(I) \cup V(J) \iff I(x) = 0 \vee J(x) = 0 \iff I(x) \cdot J(x) = 0 \iff (IJ)(x) = 0 \iff x \in V(IJ).$$

Donc $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$. Puisque $(I \cap J)(x) = I(x) \cap J(x)$, on a de même
$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$. De plus $(\cup_i J_i)_x = \cup_i (J_i)(x)$. Donc

$$(\cup_i J_i)(x) = 0 \iff \forall i, (J_i)(x) = 0 \iff \cap_i (J_i)(x) = 0 \iff (\cap_i J_i)(x) = 0.$$

Ainsi $V(\cup_i J_i) = \cap_i V(J_i)$. Si $J \subset I$, alors

$$V(I) = \{x, \forall P \in I, P(x) = 0\} \subset \{x, \forall P \in J, P(x) = 0\} = V(J).$$

Ce qui fournit le quatrième point. □

1.2 Structure des ensembles algébriques

Définition 0.2. *Un anneau A est **nothérien** si tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments de A.*

Théorème **1.1.** *Si R est un anneau nothérien alors $R[X_1, ..., X_n]$ est nothérien.*

Preuve : Puisque $R|X_1, ..., X_{n+1}]$ est isomorphe à $R[X_1, ..., X_n][X_{n+1}]$, il suffit que montrer que $R[X]$ est nothérien. Soit I un idéal de $R[X]$ et J l'ensemble des coefficients dominants des polynômes de I. J est un idéal de R donc il existe $a_1, ..., a_n$ qui engendrent J. Soit $F_1, ..., F_n$ des polynômes de I dont les coefficients dominants sont respectivement $a_1, ..., a_n$. On note m le maximum des degrés des F_i. Pour tout $d \leq m$, on note J_d l'ensemble des coefficients dominants des polynômes de degré au plus d dans I. C'est un idéal. Il existe donc $a_{1,d}, ..., a_{p,d}$ qui engendrent J_d. On note $F_{1,d}, ..., F_{p,d}$ des polynômes de I de degré d de coefficient dominant $a_{1,d}, ..., a_{p,d}$ respectivement. On note I' l'idéal engendré par les F_i et $F_{i,d}$ avec $d \leq m$. Montrons que $I = I'$. On a bien sûr $I' \subset I$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'inclusion soit stricte. Soit $G \in I$ de plus bas degré et qui n'est pas dans I'. Si $\deg(G) > m$, alors il existe $c_i \in R$ tel que $S := \sum_i c_i F_i$ a le même coefficient dominant que G. On a bien sûr $\deg(S) \leq m \leq \deg(G)$. On pose $k = \deg(G) - \deg(S)$. On note $H = G - X^k S$ et on vérifie que $\deg(H) < \deg(G)$ (car G et $X^k S$ ont même degré et coefficient dominant). Donc $H \in I'$ car G est de plus bas degré donc $G \in I'$ ce qui est absurde. Si $d = \deg(G) \leq m$, alors il existe des $c_i \in R$ tels que $S = \sum_i c_i F_{i,d}$ a le même coefficient dominant que G. Donc $\deg(G - S) < \deg(G)$. Et ainsi, par minimalité du degré et $S \in I'$, $G \in I'$. Ce qui est absurde. Donc par double inclusion on a : $I = I'$. $\square$

Corollaire **0.1.** *Tout ensemble algébrique est une intersection finie d'hypersurfaces.*

Preuve : Soit V un ensemble algébrique. Par le théorème précédent il existe $F_1, \ldots, F_r$ tels que $V = V(F_1, \ldots, F_r)$. D'après la proposition 1.1 on a $V = \bigcap_{i=1}^{r} V(F_i)$. $\square$

1.3 Idéal d'un ensemble de points

Dans cette sous-section on se placera dans l'espace $\mathbb{A}^n$. Soit V une partie de $\mathbb{A}^n$. On définit $I(V) := \{P \in k[X_1, ..., X_n], \forall x \in V, P(x) = 0\}$. On remarque que pour tout $x \in V$, $I(X)(x) = 0$.

Lemme 0.2. *Soit $I \subset k[X_1, ..., X_n]$. Si pour tout $x \in V$, $I(x) = 0$, alors $I \subset I(V)$.*

Preuve : Soit $P \in I$. Puisque pour tout $x \in V$, $P(x) \in I(x) = 0$, $P \in I(V)$, ainsi $I \subset I(V)$. $\square$

Proposition 1.2. *Soit V un ensemble algébrique.*

$$V(I(V)) = V$$

De plus pour toute partie A on a $A \subset V(I(A))$ et si $A \subset B$, alors $I(B) \subset I(A)$ (la réciproque est vraie si A et B sont des ensembles algébriques.

Preuve : Il existe un idéal $J \subset k[X_1, ..., X_n]$ tel que $V(J) = V$.
Soit $x \in V$, on a par définition $I(V)(x) = 0$, donc $x \in V(I(V))$ et ainsi $V \subset V(I(V))$. Puisque pour tout $x \in V$, $J(x) = 0$ donc $J \subset I(V)$ et ainsi $V(I(V)) \subset V(J) = V$. Et donc $V = V(I(V))$.
Soit $x \in A$, on a donc $I(A)(x) = 0$ et ainsi $x \in V(I(A))$, donc $A \subset V(I(A))$.
Puisque pour tout $x \in A \subset B$ $I(B)(x) = 0$, on a $I(B) \subset I(A)$. Soit V, W deux ensembles algébriques tels que $I(W) \subset I(V)$. Puisque $V(I(A)) = A$ si A est algébrique, et, $V(\cdot)$ est décroissant pour l'inclusion, $V = V(I(V)) \subset V(I(W)) = W$. $\square$

On vient de montrer que si V est un ensemble algébrique, $I(V)(x) = 0$ si et seulement si $x \in V$. Et que I : {ensemble algébrique} $\to$ {idéal} est injectif. Précisons un peu cette relation :

Proposition 1.3. *Soit $A \subset \mathbb{A}^n$. L'idéal $I(A)$ est radical.*

Preuve : On a évidemment $I(A) \subset \sqrt{I(A)}$. Soit $P \in \sqrt{I(A)}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^n \in I(A)$. Donc pour tout $x \in A$, $P^n(x) = 0$, donc $P(x) = 0$. Ainsi $P \in I(A)$. Donc $\sqrt{I(A)} \subset I(A)$. Et par double inclusion on a : $I(A) = \sqrt{I(A)}$. $\square$

Ainsi I établit une bijection entre les ensembles algébrique et les idéaux radicaux.

1.4 Irréductibilité

Un ensemble algébrique V est dit **irréductible** si $V \neq \emptyset$, et si pour tout V_1, V_2 des ensembles algébriques affines, $V = V_1 \cup V_2$ implique qu'au moins l'un des deux V_i est égal à V.

Proposition 1.4. *Soit V un ensemble algébrique. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

- *V est irréductible*
- *$I(V)$ est premier*

Preuve : On remarque que si $V \subset V_1 \cup V_2$ avec V_i un ensemble algébrique, alors $V = V \cap V_1 \cup V \cap V_2$ et $V \cap V_i$ est algébrique. Donc, V n'est pas irréductible, si et seulement si, il existe des ensembles algébriques V_1, V_2 tels que $V \subset V_1 \cup V_2$ et $V \not\subset V_1, V_2$, si et seulement si, il existe des ensembles algébriques V_1, V_2 tels que $I(V_1)I(V_2) \subset I(V)$ et $I(V) \not\subset I(V_1), I(V_2)$ (par l'injectivité et décroissance de I), si et seulement si, il existe deux idéaux radicaux $I_1, I_2 \not\subset I(V)$ tels que $I_1 I_2 \subset I(V)$, si et seulement si, $I(V)$ n'est pas premier. $\square$

Proposition 1.5. *Soit V un ensemble algébrique. Il existe alors une unique famille finie d'ensembles algébriques irréductibles $V_1, ..., V_r$ tels que*

$$V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i.$$

De plus si $i \neq j$ alors $V_i \not\subset V_j$.

Preuve : On pose $\mathcal{S}$ l'ensemble des ensembles algébriques ne possédant pas de décomposition comme dans la proposition ci-dessus. Supposons que $\mathcal{S}$ n'est pas vide. Posons $\mathcal{S}_{bis} = I(\mathcal{S})$. Puisque $\mathcal{S}$ est non vide il en est de même de $\mathcal{S}_{bis}$. Donc $\mathcal{S}_{bis}$ possède un élément maximal J (car si ce n'était pas le cas il existerait une suite croissante non stationnaire d'idéaux ce qui est absurde car $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien). Puisque $V(\cdot)$ est décroissante et $V(I(V)) = V$,

$V := V(J)$ est minimal dans $\mathcal{S}$. Puisque V est dans $\mathcal{S}$ il existe $V_1, V_2 \neq V$ qui sont des ensembles algébriques tel que au moins un des deux V_1 ou V_2 soit dans $\mathcal{S}$ et $V = V_1 \cup V_2$. On peut supposer sans restriction que c'est V_1 qui est dans $\mathcal{S}$. Ainsi V_1 étant strictement plus petit que V. Donc V n'est pas un élément minimal de $\mathcal{S}$. C'est absurde. Donc $\mathcal{S} = \emptyset$. $\square$

1.5 Théorème des zéros de Hilbert

Dans cette sous-section on supposera que k est un corps algébriquement clos.

Théorème 1.2. *Soit I un idéal propre de $k[X_1, ..., X_n]$ alors $V(I)$ est non vide.*

Preuve : Soit J un idéal maximal contenant I. Alors $L = k[X_1, ..., X_n]/J$ est une extension de corps de k. On note $\pi : k[X_1, \ldots, X_n] \to L$ la projection canonique. Montrons que $\pi' := \pi_{|k}$ est un isomorphisme. Soit $x \in L$. Il existe L' un corps tel que $k \subset L'$, et, $\phi : L' \to L$ un isomorphisme tel que $\pi_k = \phi \circ i_k$, où i_k est l'inclusion de k dans L' (voir [3], Proposition 2.3 page 231). On a $[L : k] \leq n$, donc la famille $(\phi(x)^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est liée (car il y a $n+1$ vecteurs). Ainsi il existe des $\lambda_i \in k$ tels que $0 = \lambda_0 + \lambda_1.\phi(x) + \cdots + \lambda_n \phi(x)^n$. En posant $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ on a $P(\phi(x)) = 0$. De plus $P \in k[X]$ et k est algébriquement clos. Donc toutes les racines de P sont dans k. Ainsi $\phi(x) \in k$. Donc $k = L'$, ce qui nous donne $\pi_{|k} = \phi$. Ce qui conclut. Soit a_i le résidu modulo J de X_i. On a alors $X_i - \pi_{|k}^{-1}(a_i) \in J$. Or $(X_1 - \pi_{|k}^{-1}(a_1), ..., X_n - \pi_{|k}^{-1}(a_n))$ est un idéal maximal contenu dans J. Donc $J = (X_1 - \pi_{|k}^{-1}(a_1), ..., X_n - \pi_{|k}^{-1}(a_n))$. Et ainsi $\left\{(\pi_{|k}^{-1}(a_1), ..., \pi_k^{-1}(a_n))\right\} = V(J) \subset V(I)$. $\square$

Théorème 1.3. *Si I un idéal de $k[X_1, ..., X_n]$, alors $I(V(I)) = \sqrt{I}$.*

Preuve : On a bien sûr $\sqrt{I} \subset I(V(I))$. Puisque l'anneau des polynômes est nothérien il existe $F_1, ..., F_r$ tels que $I = (F_1, ..., F_r)$. Soit $G \in I(V(I))$. On pose $J = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$. On vérifie facilement que J ne possède aucun zéro. Donc par le théorème précédent $J = k[X_1, ..., X_{n+1}]$. Et ainsi $(1) = J$. On peut donc écrire

$$1 = \sum_{i=1}^{r} G_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + (X_{n+1}G - 1)H(X_1, ..., X_{n+1}).$$

On regarde maintenant cette égalité dans $k(X_1, \ldots, X_{n+1})$ le corps des fractions de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. On peut alors considérer $Y = \frac{1}{X_{n+1}}$. On a alors pour m assez grand :

$$Y^m = \sum_{i=1}^{r} K_i(X_1, ..., X_n, Y)F_i + D(X_1, ..., X_n, Y)(G - Y).$$

Soit $(x_1, ..., x_n) \in k^n$. par l'égalité précédente pour tout $y \in k^*$,

$$y^m = \sum_{i=1}^{r} K_i(x_1, ..., x_n, y)F_i(x_1, \ldots, x_n) + D(x_1, ..., x_n, y)(G(x_1, \ldots, x_n) - y).$$

Or k étant algébriquement clos, k^* est infini. Puisque

$$\sum_{i=1}^{r} K_i(x_1, ..., x_n, Y)F_i(x_1, \ldots, x_n) + D(x_1, ..., x_n, Y)(G(x_1, \ldots, x_n) - Y) - Y^m$$

possède une infinité de 0, on a :

$$X_{n+1}^m = \sum_{i=1}^{r} K_i(x_1, ..., x_n, X_{n+1}) F_i(x_1, \dots, x_n) + D(x_1, ..., x_n, X_{n+1})(G(x_1, \dots, x_n) - X_{n+1}).$$

Et ainsi par récurrence on a :

$$X_{n+1}^m = \sum_{i=1}^{r} K_i(X_1, ..., X_n, X_{n+1}) F_i + D(X_1, ..., X_n, X_{n+1})(G(X_1, \dots, X_n) - X_{n+1}).$$

En remplaçant X_{n+1} par G on obtient que $G^m \in I$. Donc $G \in \sqrt{I}$. Ainsi par double inclusion $\sqrt{I} = I(V(I))$. $\square$

***Corollaire* 0.2.** *Soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. On a l'équivalence suivante :*

$$\dim_k k[X_1, ..., X_n]/I < \infty \iff V(I) \text{ est fini.}$$

Et dans ce cas

$$\#V(I) \leq \dim_k k[X_1, ..., X_n]/I.$$

Preuve : On suppose que $V(I) = \{x_1, ..., x_k\}$. On pose F_i le complémentaire de

$$\{(l, j) \in [\![1, k]\!] \times [\![1, n]\!], \exists r \in [\![1, n]\!], x_{i,r} = x_{l,j}\}.$$

Pour $Q_i := \begin{cases} (X_k - x_{i,1}) \prod_{(l,j)\in E_i} (X_j - x_{l,j}) \text{ s'il existe } k \text{ tel que } x_{i,k} \neq x_{i,1} \\ \prod_{(l,j)\in E_i} (X_j - x_{l,j}) \text{ sinon} \end{cases}$ on a $Q_i(x_i) \neq 0$ et $Q_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$. On pose $F_i := \frac{1}{Q_i(x_i)} Q_i$. Soit λ_i tel que

$$\sum \lambda_i F_i = 0 \mod (I).$$

Donc $\sum \lambda_i F_i \in I$ et donc $\lambda_j = \sum \lambda_i F_i(x_j) = 0$. Ainsi $\{F_i\}$ est une famille libre $\mod (I)$. Et donc $\#V(I) \leq \dim_k k[X_1, ..., X_n]/I$. Supposons que $k[X_1, ..., X_n]/I$ est de dimension fini m et que $\#V(I) \geq m + 1$. En appliquant le raisonnement à une partie finie de $V(I)$ de cardinal $m+1$ on obtient $m+1 \leq m$. Ce qui est absurde. Supposons que $V(I) = \{x_1, \dots, x_k\}$. On a : $\sqrt{I} = I(x_1, \dots, x_k) = \cap (X_1 - x_{i,1}, \dots, X_n - x_{i,n})$. Donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\cap (X_1 - x_{i,1}, \dots, X_n - x_{i,n}))^m \subset I$. Or $G_i := \prod_{j=1}^{k} (X_i - x_{j,i}) \in \cap (X_1 - x_{i,1}, \dots, X_n - x_{i,n})$. Donc $G_i^m \in I$ et $G_i \in k[X_i]$. Ainsi la famille des monômes de degré inférieur à $m \sum_{i=1}^{n} \deg(G_i)$ forme une famille génératrice de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. $\square$

2 Morphismes

Soit V un ensemble algébrique.

2.1 Anneau de coordonnées

On appelle anneau de coordonnées de V le quotient $\Gamma(V) := k[X_1, ..., X_n]/I(V)$.

Proposition 2.1. *$\Gamma(V)$ est un anneau nothérien. Si V est irréductible, alors $\Gamma(V)$ est intègre.*

Preuve : Puisque $\Gamma(V)$ est le quotient d'un anneau nothérien, il est lui même un anneau nothérien. Puisque V est irréductible, $I(V)$ est premier. Donc $k[X_1, ..., X_n]/I(V)$ est intègre. □

Une **fonction polynomiale** est une fonction $f \in \mathcal{F}(V, k)$ qui coïncide avec l'évaluation d'un certain polynôme $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$ sur V. Il est aisé de vérifier que l'ensemble des fonctions polynomiales est un sous-anneau de $\mathcal{F}(V, k)$, ce que l'on laisse donc au lecteur.

Proposition 2.2. *Soit $f, g \in \mathcal{F}(V, k)$ deux fonctions polynomiales. f coïncide avec g si et seulement si $F - G \in I(V)$. De plus $\Gamma(V)$ est isomorphe à l'anneau des fonctions polynomiales sur V.*

Preuve : Considérons $\alpha : k[X_1, ..., X_n] \to \mathcal{F}(V, k)$ définie par $F \mapsto f$ où $f(x) = F(x)$ pour tout $x \in V$. Cette application est surjective dans l'anneau des fonctions polynomiales et de noyaux $I(V)$. On conclut par le premier théorème d'isomorphisme de Noether. □

2.2 Fonctions polynomiales

Soit $V \subset \mathbb{A}^n$ et $W \subset \mathbb{A}^m$ deux ensembles algébriques irréductibles. Une fonction $f : V \to W$ est une **fonction polynomiale** s'il existe m fonctions polynomiales $f_i \in \mathcal{F}(V, k)$ telles que $f = (f_1, ..., f_m)$. Une fonction polynomiale $\phi : V \to W$ induit un morphisme d'anneaux $\phi^* : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ définie par : $\phi^*(f) = f \circ \phi$.

Proposition 2.3. *L'application $\phi \mapsto \phi^*$ est un isomorphisme entre l'anneau des applications polynomiales $V \to W$ et l'anneau des morphismes de k-algèbre $\Gamma(W) \to \Gamma(V)$. De plus toute fonction polynomiale $V \to W$ est la restriction d'une application polynomiale $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.*

Preuve : On a juste à montrer que cette application est surjective. En effet cette application est clairement un morphisme et est de plus injectif (il suffit de prendre pour f une fonction coordonnée). On pose $\pi_V : k[X_1, \ldots, X_n] \to \Gamma(V)$ et $\pi_W : k[X_1, \ldots, X_n] \to \Gamma(W)$ le morphisme de projection canonique. Soit $\alpha : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ un morphisme de k-algèbre. Il existe des $T_i \in k[X_1, ..., X_n]$ tels que $\alpha(\pi_W(X_i)) = \pi_V(T_i)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. On pose $T = (T_1, ..., T_m)$. T est une fonction polynomiale $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. On a alors en utilisant le fait que α est un morphisme de k-algèbre les égalités suivantes : $\pi_V(P \circ T) = \pi_V(P(T_1, ..., T_m)) = P(\pi_V(T_1), ..., \pi_V(T_m)) = P(\alpha(\pi_W(X_1)), ..., \alpha(\pi_W(X_m))) = \alpha(\pi_W(P))$. Ainsi pour tout $P \in I(W)$, $P \circ T \in I(V)$. On obtient alors que pour tout $x \in V$ et $P \in I(W)$, $P(T(x)) = 0$. Donc $T(x) \in W$. Ainsi $T(V) \subset W$. Donc $\overline{T} : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ est bien définie et par le calcul qui précède elle coincide avec α. □

2.3 Changements de coordonnées

Soit $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ une fonction polynomiale et $P \in k[X_1, ..., X_m]$. On note $P^T := P \circ T$. Soit I un idéal de $k[X_1, ..., X_m]$ et V un ensemble algébrique. On note $V^T := T^{-1}(V)$ et $I^T := \left\{P^T, P \in I\right\}$.

Définition 0.1. *On dit que T est un* ***changement de coordonnées affine*** *si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\deg(T_i) = 1$ et T est bijective.*

Proposition 2.4. *Soit $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ et $R : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^k$ des changements de coordonnées. Les fonctions suivantes sont des changements de coordonnées affines :*

1. $R \circ T$
2. T^{-1}

Preuve : La preuve est laissée au soin du lecteur. $\square$

Proposition 2.5. *Soit T un changement de coordonnée et F un polynôme. On a alors : $T^{-1}(V(F)) = V(F^T)$.*

Preuve : Soit $x \in T^{-1}(V(F))$. On a donc $T(x) \in V(F)$. Ainsi $F \circ T(x) = 0$. Donc $x \in V(F^T)$. Ce qui nous amène à : $T^{-1}(V(F)) \subset V(F^T)$. Et l'inclusion réciproque s'obtient en remontant les implications précédentes. $\square$

2.4 Fonctions rationnelles et anneaux locaux

Ici k sera supposé algébriquement clos.

2.4.1 Introduction

Soit V un ensemble algébrique irréductible et $x \in V$. Puisque $\Gamma(V)$ est intègre on peut considérer son corps des fractions et on le note $k(V)$. Un élément $k(V)$ est appelé une **fonction rationnelle** sur V. On commence par ce lemme pour pouvoir définir correctement de futurs notions.

Lemme 0.1. *Soit $x \in V$ et $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $P(x) = 0$, alors pour tout $Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P \equiv Q \mod (I(V))$, $Q(x) = 0$.*

Preuve : Soit $Q \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $P \equiv Q \mod (I(V))$. Il existe alors $R \in I(V)$ tel que $Q = P + R$. Puisque $R \in I(V)$ on a en particulier que $R(x) = 0$. Donc $Q(x) = P(x) + R(x) = 0 + 0 = 0$. $\square$

Soit $g \in \Gamma(V)$. On écrit $g(x) = 0$ si pour $G \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $\pi_V(G) = g$ on a $G(x) = 0$. (ceci a du sens car si $G(x) = 0$ alors c'est le cas de tout élément de $\pi_V(G)$ d'après **??**), sinon on écrit $g(x) \neq 0$. On dit que $f \in k(V)$ est **définie** (ou **régulière**) en $x \in V$ si il existe $(g, h) \in \Gamma(V)^2$ tel que $h(x) \neq 0$ et $f = g/h$. On dit que x est un **pôle** de f sinon. Et on note $\mathcal{O}_x(V) = \{f \in k(V), \exists (g, h) \in k[V]^2, h(x) \neq 0 \text{ et } f = g/h\}$ l'ensemble des fonctions rationnelles sur V définies en x.

Proposition 2.6. *Soit $x \in V$. Le triplet $(\mathcal{O}_x(V), +, \times)$ est un anneau local noethérien d'idéal maximal :*

$$\boldsymbol{m}_x(V) = \{f \in \mathcal{O}_x(V), f(x) = 0\}.$$

Preuve : Soit $f_1 = g_1/h_1, f_2 = g_2/h_2 \in \mathcal{O}_x(V)$ tels que $h_1(x), h_2(x) \neq 0$. On a

$$f_1 + f_2 = \frac{g_1 h_2 + g_2 h_1}{h_1 h_2}.$$

De plus $(h_1h_2)(x) = h_1(x)h_2(x) \neq 0$ car $h_1(x), h_2(x) \neq 0$. Donc $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}_x(V)$. Et bien sûr $-f_1 \in \mathcal{O}_x(V)$. Pour la multiplication on a : $f_1f_2 = (g_1g_2)/(h_1h_2)$. Puisque $(h_1h_2)(x) \neq 0$, $f_1f_2 \in \mathcal{O}_x(V)$. De plus puisque $0 = 0/1$ et $1 = 1/1$, on a $0, 1 \in \mathcal{O}_x(V)$. Ainsi $\mathcal{O}_x(V)$ est un anneau. On constate facilement que l'ensemble des éléments non-inversible de $\mathcal{O}_x(V)$ est $\mathbf{m}_x(V)$. Ainsi $\mathcal{O}_x(V)$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathbf{m}_x(V)$. De plus étant donné que cet anneau est le localisé d'un anneau Noethérien, il est lui même Noethérien. □

Cet anneau est appelé **anneau local** de V en x.

Lemme 0.2. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} k[X_1,\dots,X_n] \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\pi_V"'] & k(X_1,\dots,X_n) \arrow[r, "\pi"] & k(V) \\ \Gamma(V) \arrow[urr, "i_2"'] & & \end{tikzcd}$$

, avec i_1, i_2 les injections naturelles et π l'application définie par $\pi(F/G) = \pi_V(F)/\pi_V(G)$. De plus π est un k-morphisme de corps surjectif.

<u>Preuve :</u> Soit $F_1/G_1 = F_2/G_2$. On a $\pi_V(F_1G_2) = \pi_V(F_2G_1)$. Or π_V est un morphisme de k-algèbre. Donc $\pi_V(F_1)\pi_V(G_2) = \pi_V(F_2)\pi_V(G_1)$. Ainsi $\pi(F_1/G_2) = \pi(F_2/G_2)$. Donc π est bien définie. On constate aisément que π est un k-morphisme de corps. De plus pour $f/g \in k(V)$ il existe $F, G \in k[X_1,\dots,X_n]$ tels que $f = \pi_V(F)$ et $g = \pi_V(G)$. Donc $\pi_V(F/G) = \pi_V(F)/\pi_V(G) = f/g$. Ainsi π est surjectif. On remarque que pour tout $F \in k[X_1,\dots,X_n]$ on a $\pi(i_1(F)) = \pi_V(F)/\pi_V(1) = i_2(\pi_V(F))$. Ce qui démontre que le diagramme est commutatif. □

On peut ainsi étendre π_V à $k(X_1,\dots,X_n)$.

Proposition 2.7. *Soit V un ensemble algébrique irréductible.*

1. $\Gamma(V) = \bigcap_{x\in V} \mathcal{O}_x(V)$
2. *L'ensemble des pôles de $f \in k(V)$ est un sous ensemble algébrique de V.*
3. *Soit T un changement de coordonnées, on a alors : $\mathcal{O}_x\left(V^T\right) \cong \mathcal{O}_{T(x)}\left(V\right)$*

<u>Preuve :</u> Soit $f \in k(V)$. On note $J_f := \{G \in k[X_1, ..., X_n], \pi_V(G)f \in \Gamma(V)\}$. L'ensemble J_f est un idéal. En effet J_f est bien un groupe car $\Gamma(V)$ en est un. De plus pour $G \in J_f$ et $H \in k[X_1, ..., X_n]$, $\pi_V(HG)f = \pi_V(H)\pi_V(G)f$. Or $\pi_V(H), \pi_V(G)f \in \Gamma(V)$. Donc $HG \in J_f$. De plus $V(J_f)$ est l'ensemble des pôles de f. En effet, soit $x \in V$ un pôle de f. Pour $G \in J_f$, $\pi_V(G)f \in \Gamma(V)$. Donc $(GF)(x)$ est bien définie (avec $F \in k(X_1,\dots,X_n)$ et $\pi_V(F) = f$). Or si $G(x) \neq 0$ alors $F(x)$ est bien définie. Donc il existe $(N, D) \in k[X_1,\dots,X_n]^2$ tel que $F = N/D$ et $D(x) \neq 0$. Ainsi $f = \pi_V(N)/\pi_V(D)$ et $\pi_V(D)(x) \neq 0$. Donc f est bien définie en x. Ce qui est absurde. Donc $G(x) = 0$. Soit $x \in V(J_f)$. Puisque $hf \in \Gamma(V)$ (avec $f = \frac{g}{h}$) et que les zéros de H ($h = \pi_V(H)$) sont les pôles de f, $V(J_f)$ est contenu dans l'ensemble des pôles de f. Donc par double inclusion $V(J_f)$ correspond à l'ensemble des pôles de f. Et ainsi l'ensemble des pôles de f est un ensemble algébrique. On a bien sûr : $\Gamma(V) \subset \bigcap_{x\in V} \mathcal{O}_x(V)$. Soit $f \in \bigcap_{x\in V} \mathcal{O}_x(V)$. Puisque f est régulière en tout point, $V(J_f)$ est vide. Ainsi par le théorème des zéros de Hilbert (que l'on peut appliquer car on a supposer pour cette section que k est

algébriquement clos) $\sqrt{J_f} = k[X_1, \ldots, X_n]$. De plus on vérifie facilement que J_f est radical. Donc $J_f = k[X_1, \ldots, X_n]$. Ainsi $f = \pi_V(1)f \in \Gamma(V)$. $\square$

Ici on a un théorème clé dans la démonstration du théorème de Bézout. Ce théorème sert dans les faits à passer du local au global.

2.4.2 Passage du local au global, premier pas...

Lemme 0.3. *Soit I et J deux idéaux étrangers. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, I^n et J^m sont étrangers.*

Preuve : Soit $N = \max\{n, m\}$. Soit $(i, j) \in I \times J$ tel que $i + j = 1$. L'anneau étant commutatif, $1 = (i + j)^{2N}$ est la somme d'élément de la forme (à un facteur près) i^N ou j^N. Donc $1 \in I^N + J^N$. Or $I^N + J^N \subset I^n + J^m$. Donc I^n et J^m sont étrangers. $\square$

***Théorème* 2.1.** *Soit $I \subset k[X_1, ..., X_n]$ un idéal tel que $V(I) = V$ est fini.*

$$k[X_1, ..., X_n]/I \cong \prod_{x \in V} \mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)/I\mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)$$

Et $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est de dimension finie sur k.

Preuve : Soit $V(I) = \{x_1, ..., x_r\}$. Et puisque les $I(x_i)$ sont maximaux ils sont étrangers deux à deux. Par le théorème des zéros on a : $\prod I(x_i) = \bigcap I(x_i) = \sqrt{I}$. Puisque $k[X_1, ..., X_n]$ est Noethérien il existe N tel que $\prod I(P_i)^N \subset \left(\prod I(x_i)\right)^N = \sqrt{I}^N \subset I$. Puisque les $I(P_i)$ sont étrangers deux à deux il en est de même des $I(x_i)^N$ d'après le lemme 0.3. Ainsi par le théorème des restes chinois, $k[X_1, ..., X_n]/I \cong \prod_{i=1}^{r} k[X_1, ..., X_n]/(I + I(x_i)^N)$. Ainsi si on montre que $k[X_1, \cdots, X_n]/\left(I + I(x_i)^N\right) \cong \mathcal{O}_{x_i}(\mathbb{A}^n)/(I(x_i) + I)\mathcal{O}_{x_i}(\mathbb{A}^n)$ (car $V(I + I(x_i)^N) = V(I) \cap V(I(x_i)^N) = \{x_i\}$) on a gagné. On supposera donc pour la suite que $V(I) = \{x\}$. Par le corolaire 0.2 $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est de dimension finie. Attaquons nous à l'isomorphisme. Considérons d'abord le morphisme injectif canonique

$$k[X_1, \ldots, X_n]/I \to \mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)/I\mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n).$$

Montrons qu'il est surjectif. Soit F/G une fonction rationnelle de $\mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)$. Par définition de $I(x)$ on a : $G(x) - G \in I(x)$. Et donc $c - G \in I(x) = \sqrt{I}$ avec $c = G(x)$. Ainsi il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(c - G)^N \in I$. Il existe donc $K \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $c^N - GK = (c - G)^N$. Ainsi $c^N = GK \mod I\mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)$. Et enfin $F/G = \frac{1}{c^N}F \mod (I)$ (ce qui est possible car $c \neq 0$). Ce qui conclut sur la surjectivité et donc le caractère 'isomorphe' est établit. $\square$

2.5 Polynômes homogènes

Soit A un anneau intègre. F un polynôme homogène de $A[X_1, ..., X_n]$ et G un polynôme de $A[X_1, ..., X_n]$. On pose :

- $G^* = X_{n+1}^d G\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \ldots, \frac{X_n}{X_{n+1}}\right)$, avec $d = \deg(G)$.
- $F_* = F(X_1, ..., X_{n-1}, 1)$

Proposition 2.8. *Soit $(F,G) \in k[X_1,\dots,X_{n+1}]^2$ et $(f,g) \in k[X_1,\dots,X_n]^2$.*

1. *$(FG)_* = F_*G_*$ et $(fg)^* = f^*g^*$.*
2. *Si $F \neq 0$ et r le plus grand entier tel que X_{n+1}^r divise F, $X_{n+1}^r(F_*)^* = F$, de plus $(f^*)_* = f$.*
3. *$(F+G)_* = F_* + G_*$ et $X_{n+1}^t(f+g)^* = X_{n+1}^r f^* + X_{n+1}^s g^*$ avec $r = \deg(g)$, $s = \deg(f)$, $t = r+s-\deg(g+f)$*

Preuve : Décomposons F et G comme un élément de $k[X_1,\dots,X_n][X_{n+1}]$: $F = \sum_{i=0}^{r} F_i X_{n+1}^i$ et $G = \sum_{i=1}^{r} G_i X_{n+1}^i$. Ainsi $(FG)_* = \left(\sum_{k=0}^{2r}\left(\sum_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le r}} F_iG_j\right)X_{n+1}^k\right)_* = \sum_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le r}} F_iG_j$ et $F_*G_* = \left(\sum_{i=0}^{r} F_i\right)\left(\sum_{k=0}^{r} G_k\right) = \sum_{k=0}^{2r}\sum_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le r}} F_iG_j$. Ce qui donne la première égalité. Passons à la 6-ième égalité. Soit $f = \sum_{i=0}^{r} f_i$ et $g_= \sum_{i=0}^{r} g_i$ les décompositions en polynômes homogènes de f et g, vérifiant $\deg(f_i) = \deg(g_i) = i$. On a alors $X_{n+1}^t(f+g)^* = X_{n+1}^t\left(\sum (f_i+g_i)X_{n+1}^{\deg(f+g)-\deg(f_i+g_i)}\right) = \sum_{i=0}^{r}(f_i+g_i)X_{n+1}^{\deg(f)+\deg(g)-i}$ car si $\deg(f_i+g_i) < i$ alors $f_i+g_i = 0$. De même $X_{n+1}^{\deg(g)}f^* = \sum_{i=0}^{r} f_iX_{n+1}^{\deg(f)-\deg(f_i)+\deg(g)}$ et $X_{n+1}^{\deg(f)}g^* = \sum_{i=0}^{r} g_iX_{n+1}^{\deg(g)-\deg(g_i)+\deg(f)}$. Ce qui conclut en sommant les deux égalités précédentes. On laisse au lecteur le soin de rédiger la démonstration les 3,4 et 5ème égalités. □

Remarque 2.1. *On peut simplifier les questions de factorisations avec ce procédé, en effet, à une puissance près de X_{n+1}, factoriser un polynôme homogène F de $A[X_1,...,X_{n+1}]$ c'est factoriser F_*.*

Corollaire 0.1. *De plus si k est algébriquement clos et $F \in k[X,Y]$ alors*

$$F = cY^r \prod (X - \lambda_i Y).$$

Preuve : On a $F_\star \in k[X]$. Donc il existe des $\lambda_i \in k$ tel que $F_* = \prod (X-\lambda_i)$. Et d'après la proposition précédente il existe un entier r tel que $F = Y^r\prod(X-\lambda_iY)$. □

3 Propriétés locales des courbes planes

A partir d'ici, on va appeler courbe un polynôme non nul et droite un polynôme de degré 1.

3.1 Multiplicité en un point et tangente

x est un point **simple** (ou **régulier**) de $F \in k[X,Y]$ si on a soit $F(x) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial X}(x) \neq 0$, soit $F(x) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial Y}(x) \neq 0$. Sinon on dit que x est un point **multiple** (ou singulier). Si x est un point simple de F alors la courbe $\frac{\partial F}{\partial X}(x)(X-a) + \frac{\partial F}{\partial Y}(x)(Y-b)$ (avec $x = (a,b)$) est appelé la *tangente* de F en x. Supposons que F est non nulle. Soit G le polynôme homogène de plus bas degré de F et on peut écrire $G = \prod_{i=1}^{m} L_i^{r_i}$ avec L_i une droite. Si $(0,0)$ est singulier alors L_i est appelée tangente de F en $(0,0)$. On définit la multiplicité de F en $(0,0)$ comme étant le degré de G, et on le note $m_{(0,0)}(F)$. En fait la "deuxième" définition de la tangente coïncide même avec le premier cas si $x = (0,0)$.

Proposition 3.1. $(0,0)$ *est un point simple si et seulement si* $m_{(0,0)} = 1$.

<u>Preuve :</u> Puisque la définition de tangente coïncide avec la deuxième, si $m_{(0,0)}(F) \geq 2$ alors $\frac{\partial F}{\partial X}((0,0)) = 0$. De même en Y ce qui est absurde. De même pour l'autre sens. $\square$

On peut définir la multiplicité en un point x quelconque en appliquant un changement de coordonées affine T à F de sorte que $T((0,0)) = x$ et en calculant, multiplicité ou tangente, en F^T. Et bien sûr la multiplicité ne dépend pas du changement de coordonées affine choisis :

Proposition 3.2. *Soit T, S deux changement de coordonnées affine tels que $T((0,0)) = S((0,0)) = x$. On a alors $m_{(0,0)}(F^T) = m_{(0,0)}(F^S)$.*

<u>Preuve :</u> Soit G le polnyôme homogène de plus bas degré de F. Puisque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ $\deg(T_i) = 1$, pour tout $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $\deg(P^T) = \deg(P)$. Ainsi le polynôme homogène de plus bas degré de F^T (resp. F^S) est G^T (resp.G^S). De plus $\deg(G^T) = \deg(G) = \deg(G^S)$. $\square$

3.2 Multiplicité et anneaux locaux

<u>Anneau de valuation discrète</u>

Soit A un anneau intègre. Alors on a les équivalences suivantes :

- A est un anneau noethérien local et l'idéal maximal est principal.
- Il existe un unique élément irréductible $t \in A$ à un inversible près tel que tout élément de A s'écrive de manière unique sous la forme ut^n avec $u \in A^\times$ et $n \in \mathbb{N}$.

<u>Preuve :</u> Supposons le premier point. Soit m l'idéal maximal de A et t un générateur de m. Soit $a, b \in \mathbb{N}$ et $u, v \in A^\times$ tels que $ut^a = vt^b$. Quitte à permutter (a,u) et (b,v) (ce qui est possible puisque permutter (a,u) et (b,v) ne changent rien à l'équation envisagée), on peut supposer $a \leq b$. On a alors $u = vt^{b-a}$. Donc $b = a$ sinon $u \in m$. Et donc m n'est pas propre. L'écriture est donc unique. Soit $a \in A$ tel que a ne s'écrive pas comme voulu. Donc $a \in m = (t)$. Donc il existe $u_1 \in A$ tel que $a = u_1 t$. De même $u_1 \in (t)$ et il existe $u_2 \in A$ tel que $u_1 = u_2 t$ et ainsi de suite. Il existe donc une suite (u_n) de A telle que $u_n = u_{n+1}t$. Ainsi $(u_1) \subset (u_2) \subset \cdots$. Or A est Noethérien. Donc cette suite est constante à partir d'un certain rang. Donc a s'écrit comme on le voulait. Ce qui est absurde. Ce qui conclut. Supposons le deuxième point. On pose $m := (t)$. C'est clairement l'ensemble des éléments non inversibles et c'est bien évidement un idéal. Donc A est un anneau local. De plus son idéal maximal est m et il est principal. $\square$

t est alors appelé un **paramètre uniformisant** de A. Dans le cas où A vérifie l'une des deux équivalences du théorème précédent, on note l'entier n par $\mathrm{ord}_x^F(g)$ avec $g \in \mathcal{O}_x(F)$. Et dans ce cas on dit que A est anneau à **valuation dicrète**.

<u>Multiplicité</u>

Lorsque F est irréductible on pose : $\mathcal{O}_x(F) := \mathcal{O}_x(V(F))$, $\Gamma(F) := \Gamma(V(F))$ et $\mathbf{m}_x(F) := \mathbf{m}_x(V(F))$

Proposition 3.3. *Supposons F irréductible et x un point de F. x est un point simple de F si et seulement si $\mathcal{O}_x(F)$ est un anneau de valuation discrète. Et si c'est le cas et que L est une droite passant par x non tangente à F en x, alors l'image de F dans $\mathcal{O}_x(F)$ est un paramètre uniformisant.*

<u>Preuve :</u> Supposons que x est un point simple et que L est une droite passant par P et qui n'est pas tangent à F en P. Via un changement de coordonnées on peut supposer que $L = X$, que la tangente de F en x est Y et que $x = (0,0)$. Puisque $x = (0,0)$, l'image de X et Y dans $\mathcal{O}_x(F)$ (a et b) est non inversible. Ainsi $a, b \in \mathbf{m}_x(F)$. Soit $G \in \mathbf{m}_x(F)$. Puisque (a,b) est l'ensemble des polynômes avec un coefficient consant nul, en notant G_0 la partie non constante de F on a $G_0 \in (a,b)$. Donc $G - G_0 \in \mathbf{m}_x(F)$. Or $G - G_0$ est constant et $\mathbf{m}_x(F)$ est un idéal propre. Nécessairement $G = G_0 \in (a,b)$. Finalement $\mathbf{m}_x(F) = (a,b)$. En regroupant les termes en Y on obtient : $F = HY - QX^2$ avec $H(P) \neq 0$ et $Q \in k[X]$ (en utilisant le fait que Y est la tangente de F en P). Donc en regardant l'image de F dans $\Gamma(F)$: $hb - qa^2 = 0$. Ainsi $b = \frac{q}{h}a^2$. Donc $\mathbf{m}_x(F) = (a)$. De plus F est irréductible. Donc $\mathcal{O}_x(F)$ est intègre. Ainsi d'après la proposition précédente $\mathcal{O}_x(F)$ est un anneau de valuation discrète. Supposons que $\mathcal{O}_x(F)$ est un anneau à valuation discrète. Puisque $\mathbf{m}_x(F) = (t)$, on a $\mathbf{m}_x(F)^n/\mathbf{m}_x(F)^{n+1} = (t^n)/(t^{n+1}) \cong (1)/(t) \cong \mathcal{O}_x(F)/\mathbf{m}_x(F)$ (en tant que k-espace vectoriel). Or pour $f \in \mathcal{O}_x(F)$, $f - f(x) \in \mathbf{m}_x(F)$. Donc $\mathcal{O}_x(F)/\mathbf{m}_x(F) \cong k$. Ainsi d'après le théorème 3.1, $m_x(F) = 1$. Finalement, d'après , x est un point simple.

Supposons que x est un point simple sur F. Comme précédemment on peut supposer que $L = X$, que Y est la tangeante de F en $(0,0)$ et que $x = (0,0)$. Et de ce qui précède on en déduit que l'image de L dans $\mathcal{O}_x(F)$ est est un paramètre uniformisant de $\mathcal{O}_x(F)$. □

***<u>Théorème</u>* 3.1.** *Soit x un point sur une courbe irréductible F. Alors pour n suffisamment grand $m_x(F) = \dim_k(\boldsymbol{m}_x(F)^n/\boldsymbol{m}_x^{n+1}(F))$.*

<u>Preuve :</u> Voir preuve page 121 de [2]. □

Ce dernier théorème peut aussi faire office de définition pour la multiplicité en un point comme par exemple dans [2].

3.3 Nombre d'intersections

Soit F et G deux courbes, on définit le nombre d'intersection de F et G en x par $\dim_k(\mathcal{O}_x(\mathbb{A}^n)/(F,G))$ et on le note $I_x(F,G)$. On dit que F et G **s'intersectent proprement** en x si il n'ont aucunes composantes en commun qui passe par x.

Proposition 3.4. *Soit F, G, H trois courbes et x un point.*

- *$I_x(F,G) < \infty$ si et seulement si F et G s'intersectent proprement en x.*
- *$I_x(FH,G) = I_x(F,G) + I_x(H,G)$.*
- *$I_x(F,G) \neq 0$ si et seulement si $x \in F \cap G$.*
- *Si T est un changement de variable affine $I_x(F^T,G^T) = I_{T(x)}(F,G)$.*

- $I_x(F,G) = I_x(F, G + HF)$
- *L est une tangente à F en P si et seulement si, $I_x(F,L) > m_x(F)$.*

Preuve : Voir preuve page 37 de [1]. □

***Théorème* 3.2.** *Pour toute courbe F et G et $x \in \mathbb{A}^n$.*

$$I_x(F,G) \geq m_x(F)m_x(G)$$

Et avec égalité si et seulement si F et G n'ont aucune tangente commune en x.

Preuve : Voir preuve page 37 de [1]. □

Proposition 3.5. *Soit F un polynôme irréductible.*

- *Si x est un point simple de F, alors $I_x(F,G) = ord_x^F(G)$.*
- *Si F et G n'ont aucune composante en commun, alors $\sum I_x(F,G) = \dim_k(k[X,Y]/(F,G))$.*

Preuve : Si x est un point simple alors

$$\dim_k(\mathcal{O}_x(F)/(G)\mathcal{O}_x(F)) = \mathrm{ord}_x^F(G)$$

et $I_x(F,G) = \dim_k(\mathcal{O}_x(F)/(G)\mathcal{O}_x(F))$, ce qui conclut le premier point.
Supposons que F et G n'ont aucune composante en commun. D'après le théorème 2.1 on a donc $\sum_x I_x(F,G) = \dim_k(k[X,Y]/(F,G))$. □

Remarque 3.1. *Supposer F irréductible pour la proposition précédente n'est en rien restrictif puisque si F est un facteur irréductible de P et $P = FH$, alors $I_x(P,G) = I_x(F,G) + I_x(H,G)$ d'après la proposition 3.4.*

4 Géométrie projective

k sera supposé algébriquement clos.

4.1 Espace projectif

On va d'abord définir cette notion puis exposer quelques liens avec le cas affine.

Définition 0.1. *L'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$ est le quotient induit par l'action multplicative de $k^\times$ sur $k^{n+1} \setminus \{0\}$.*

On note $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ l'orbite de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Et avec cette notation on définit $U_i = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}], x_i = 1\}$.

Proposition 4.1. *Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, k^n est en bijection avec U_i par $\phi_i((x_1, \ldots, x_n)) = [x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n]$.*

Preuve : La preuve est laissée au lecteur. □

On pose $H_\infty := \mathbb{P}^n \backslash U_{n+1} = \{[x_1, ..., x_{n+1}], x_{n+1} = 0\}$, cet ensemble sera appelé hyperplan à l'infini.

Proposition 4.2. *H_∞ est en bijection avec $\mathbb{P}^{n-1}$ via $\phi : [x_1, \ldots, x_{n+1}] \mapsto [x_1, \ldots, x_n]$.*

Preuve : La preuve est laissée au lecteur. □

4.2 Ensemble algébrique projectif

4.2.1 Définitions-théorème de Hilbert projectifs

Soit $P \in k\left[X_1, \ldots, X_{n+1}\right]$ et $x = [x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{P}^n$. On dit que x est un zéro de P si pour tout $\lambda \in k^*$ $P(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_{n+1}) = 0$, et dans ce cas on note $P(x) = 0$.

Définition 0.2. *Soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_{n+1}$. On pose $V_p(I) = \{x \in \mathbb{P}^n, \forall F \in I, F(x) = 0\}$. Un ensemble de la forme $V_p(I)$ est appelé **ensemble algébrique projectif** de $\mathbb{P}^n$.*

Proposition 4.3. *Soit $F = F_0 + \cdots + F_m$ un polynôme (où les F_i sont les composantes homogènes de F), $[x_1, \ldots, x_{n+1}] = x \in \mathbb{P}^n$ est un zéro de F si et seulement si pour tout i, $F_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$.*

Preuve : x est un zéros de F si pour tout $\lambda \in k^*$, $F\left(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_{n+1}\right) = 0$, ce qui est équivalent à $\lambda^m \cdot F_m\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) + \ldots + F_1\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) = 0$, donc $X^m F_m(x_1, \ldots, x_{m+1}) + \ldots + F_0(x_1, \ldots, x_{n+1})$ possède une infinité de zéro (car un corps algébriquement clos est nécessairement infini) donc ce polynôme est le polynôme nul et ainsi pour tout i,

$$F_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0.$$

□

On commence à voir le lien avec les idéaux homogènes. De même que dans le cas affine, il est possible de construire l'analogue dans le cas projectif de l'idéal d'un ensemble. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$. On pose $I_p(X) := \{F \in k\left[X_1, \ldots, X_{n+1}\right], \forall x \in X, F(x) = 0\}$. Un idéal I de $k\left[X_1, \ldots, X_n\right]$ est dit homogène si pour tout $F \in I$ les parties homogènes de F sont dans I. Pour tout $X \in \mathbb{P}^n$, $I_p(X)$ est homogène. En effet :

Proposition 4.4. *I est homogène si et seulement si il est engendré par un ensemble fini de polynômes homogènes.*

Preuve : Si I est homogène, alors il est clair qu'il est engendré par un ensemble fini de polynômes homogènes. Supposons que I est engendré par un ensemble fini de polynômes homogènes $\left\{F^{(1)}, \ldots, F^{(n)}\right\}$ avec $d_i = \deg(F^{(i)})$. Soit $\sum_{i=r}^{m} F_i = F \in I$ avec $\deg F_i = i$. Il existe $P^{(j)}$ tels que $F = \sum_{j=1}^{n} P^{(j)} F^{(j)}$. Puisque $\sum_{j=1}^{n} P^{(j)}_{m-d_j} F^{(j)}$ est la partie homogène de degré m de F, on a $F_m = \sum_{j=1}^{n} P^{(j)}_{m-d_j} F^{(j)}$. Ainsi $F_m \in I$. Et donc $F - F_m \in I$. En raisonnant par récurrence on a pour tout i, $F_i \in I$. □

Comme dans le cas affine, on dira qu'un ensemble algébrique projectif V_p est **irréductible** si ce n'est pas l'union de deux ensembles algébriques projectifs qui ne sont ni vide ni V_p.

Proposition 4.5. *Soit I un idéal homogène de $k\left[X_1, \ldots, X_{n+1}\right]$. I est premier si et seulement si pour tous polynômes homogènes F et G de $k\left[X_1, \ldots, X_{n+1}\right]$ si $FG \in I$, alors $F \in I$ ou $G \in I$.*

Preuve : Supposons que pour tout polynôme homogène F, G tels que $FG \in I$, $F \in I$ ou $G \in I$. Soit A et B deux polynômes tels que $AB \in I$. Montrons que $A \in I$ ou $B \in I$. On décompose A et B en somme de leurs parties homogènes : $A = A_0 + \dots A_m$ et $B = B_0 + \dots + B_r$. On pose $C = \sum_{i \in [\![0,r]\!]; B_i \notin I} B_i$. Si $C = 0$, alors pour tout $i \in [\![0,r]\!]$, $B_i \in I$. Donc $B \in I$. Supposons maintenant que $C \neq 0$. On remarque que $AC \in I$ car on a enlevé de B que les parties homogènes tels que $B_i \in I$. De plus si on a $A \in I$ ou $C \in I$, alors on a $A \in I$ ou $B = C + \sum_{i \in [\![0,r]\!]; B_i \in I} B_i \in I$. Ainsi on peut supposer que $B = C$ quitte à remplacer B par C. Puisque $\sum_{\substack{k+l=q \\ k \leq m, l \leq r}} A_k B_l$ est la partie homogène de degré q de AB, $\sum_{\substack{k+l=q \\ k \leq m, l \leq r}} A_k B_l \in I$. Ainsi pour $q = 0$, on a $A_0 B_0 \in I$. Donc $A_0 \in I$ ou $B_0 \in I$. Or $B_0 \notin I$ par hypothèse sur B. Donc $A_0 \in I$. Raisonnons par récurrence et supposons que pour tout $k \leq q-1$, $A_k \in I$. Or $\sum_{\substack{k+l=q \\ k \leq m, l \leq r}} A_k B_l = A_q B_0 + A_{q-1} B_1 + \dots + A_0 B_q \in I$ et $A_{q-1} B_1, \dots, A_0 B_q \in I$ par hypothèse de récurrence. Donc $A_q B_0 = \sum_{\substack{k+l=q \\ k \leq m, l \leq r}} A_k B_l - (A_{q-1} B_1 + \dots + A_0 B_q) \in I$. Cependant $B_0 \notin I$. Donc $A_q \in I$. Ce qui conclut la récurrence. Donc $A = A_0 + \dots A_m \in I$. $\square$

Proposition 4.6. *Soit V_p un ensemble algébrique projectif.*

V_p est irréductible si et seulement si $I_p(V_p)$ est un idéal premier.

Preuve : Supposons que V_p est irréductible. Soit $(F, G) \in k[X_1, \dots, X_{n+1}]^2$ tel que $FG \in I_p(V_p)$. On peut supposer F et G homogènes d'après la proposition précédente. On a : $V_p(I_p(V_p)) \subset V_p((F)) \cup V_p((G))$. Car si $x \in V_p(I_p(V_p))$, alors puisque $FG \in I_p(V_p)$, d'après la proposition 4.3, $(FG)(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ où $x = [x_1, \dots, x_{n+1}]$. Ainsi $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$ ou $G(x_1, \dots, X_{n+1}) = 0$. Donc toujours d'après la proposition 4.3, $F(x) = 0$ ou $G(x) = O$, i.e. $x \in V_p((F)) \cup V_p((G))$. De plus on a $V_p \subset V_p(I_p(V_p))$ (c'est quasiment par définition). Donc $V_p \subset V_p((F)) \cup V_p((G))$. Or V_p est irréductible donc $V_p \subset V_p((F))$ ou $V_p \subset V_p((G))$. Quitte à échanger F et G on peut supposer que $V_p \subset V_p((F))$. Ainsi pour tout $x \in V_p$, $x \in V_p((F))$ i.e. $F(x) = 0$. Donc par définition de $I_p(V_p))$, $F \in I_p(V_p)$. Donc $I_p(V_p)$ est un idéal premier. Supposons que V_p n'est pas irréductible. Il existe donc $V_1 = V_p(I_1)$ et $V_2 = V_p(I_2)$ tels que $V_1 \cup V_2 = V_p$ et $V_1, V_2 \neq V_p$. Si $I_1 \subset I_p(V_p)$, alors pour tout $x \in V_p$ et $P \in I_1 \subset I_p(V_p)$, $P(x) = 0$ i.e. $V_p \subset I_p(I_1) = V_1$. Ce qui est absurde donc $I_1, I_2 \not\subset I_p(V_p)$. Soit $F \in I_1 \backslash I_p(V_p)$ et $G \in I_2 \backslash I_p(V_p)$. Puisque pour tout $x \in V_p$, $F(x) = 0$ ou $G(x) = 0$ (car $x \in V_1$ ou $x \in V_2$), $FG \in I_p(V_p)$. Or $F \notin I_p(V_p)$ et $G \notin I_p(V_p)$. Donc $I_p(V_p)$ n'est pas premier. $\square$

On a ainsi de nouveau (par rapport au cas affine) une correspondance entre les ensemble algébrique projectif irréductible et les idéaux premier. Maintenant peut-on se ramerner au cas affine ? Oui, avec la notion de cône par exemple :

Définition 0.3. *Soit V un ensemble algébrique projectif. On appelle cône sur V l'ensemble $C(V) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}, [x_1, \dots, x_{n+1}] \in V$ ou $(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$.*

On note $I_a(V) := I(V)$ et $V_a(I) := V(I)$ pour tout idéal $I \subset k[x_1, \dots, x_{n+1}]$ et $V \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

Proposition 4.7. *Soit V_p un ensemble algébrique projectif non vide et I un idéal homogène.*

- $I_a(C(V_p)) = I_p(V_p)$

- *Si $V_p(I) \neq \emptyset$ alors, $C(V_p(I)) = V_a(I)$*

Preuve : Montrons le premier point. Par définition $I_a(C(V)) \subset I_p(V)$. Soit $F \in I_p(V)$. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in C(V) \setminus \{0\}$. Par définition $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in V$, donc $F(P) = 0$. On peut écrire F sous la forme : $F = F_0 + \ldots + F_n$ avec $\deg(F_i) = i$ et F_i un polynôme homogène. Pour tout $\lambda \in k^*$, $0 = \lambda^n F_n(x_1, \dots, x_{n+1}) + \ldots + F_0(x_1, \dots, x_{n+1}) = F(\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_{n+1})$. Puisque k est infini (car il est algébriquement clos) l'égalité est vraie pour $\lambda = 0$. Donc $F(0) = 0$. Ainsi $F \in I_a(C(V))$. Donc par double inclusion $I_a(C(V)) = I_p(V)$. Montrons maintenant le deuxième point. Soit $F_1, \dots, F_m$ des polynômes homogène engendrant I (possible d'après la proposition 4.4). Soit $P \in V_a(I)$ et $\lambda \in k$. On a $F_i(\lambda \cdot P) = \lambda^{\deg(F_i)} F_i(P) = 0$. Donc $[P] \in V$ ou $P = 0$. Donc $P \in C(V_p(I))$. Soit $P \in C(V_p(I))$. Si $P = 0$ alors $F_i(P) = 0$ car F_i est homogène de degré strictement positif (car $V_p(I) \neq \emptyset$). Donc $P \in V_a(I)$. Supposons $P \neq 0$. Donc $[P] \in V_p(I)$. Ainsi $F_i(P) = 0$ pour tout i. Donc $P \in V_a(I)$. Et ainsi par double inclusion $V_a(I) = C(V_p(I))$. $\square$

Et ainsi on retrouve (presque) les résultats dans le cas affine :

Théorème **4.1.** *Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_{n+1}]$.*

1. *$V_p(I) = \emptyset$ si et seulement il existe N tel que I contient tous les polynômes homogènes de degré plus grand que N.*
2. *Si $V_p(I) \neq \emptyset$, $I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$.*

Preuve : Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $V_p(I) = \emptyset$

(b) $V_a(I) = C(V_p(I)) \subset \{(0, \dots, 0)\}$

(c) $(X_1, \dots, X_{n+1}) \subset \sqrt{I} = I_a(V_a(I))$

(d) $(X_1, \dots, X_{n+1})^N \subset I$.

Ce qui montre 1.. Supposons que $V_p(I) \neq \emptyset$, $I_p(V_p(I)) = I_a(C(V_p(I))) = I_a(V_a(I)) = \sqrt{I}$. $\square$

4.2.2 Anneau Local

On note $\Gamma_h(V_p) = k[X_1, \dots, X_{n+1}]/I(V_p)$ avec V_p un ensemble algébrique projectif irréductible. C'est un anneau noetherien intègre. On peut donc considérer son corps des fractions $k_h(V_p)$. On remarque que si f et g sont des polynômes homogènes de même degré alors $f/g \in k_h(V_p)$ définit une fonction sur V_p. En effet $f(\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n+1})/g(x_1, \dots, x_{n+1})$, si f et g sont homogènes. Et on définit ainsi :

Définition 0.4. $k_p(V_p) = \{f/g \in k_h(V_p), \deg(f) = \deg(g)\}$*, ses éléments sont appelés les* ***fonctions rationnelles*** *de V_p.*

On a alors une inclusion de corps : $k \subset k_p(V_p) \subset k_h(V_p)$. On dit de même que $r \in k_p(V_p)$ est définie en $x \in V_p$ si il existe $(f, g) \in \Gamma_h(V_p)^2$ tel que : $g(x) \neq 0$ et $r = f/g$. On note : $\mathcal{O}_x(V_p) = \{r \in k_p(V_p), r \text{ est définie en } x\}$.

Proposition 4.8. *$\mathcal{O}_x(V_p)$ est un anneau notherien local avec pour idéal maximal*

$$\boldsymbol{m}_x(V_p) = \{f/g \in k_p(V_p), g(x) \neq 0 \text{ et } f(x) = 0\}.$$

Preuve : On reproduit la preuve de la proposition 2.6. $\square$

On appelle un **changement de coordonnées projectif** un changement de coordonnées affine *linéaire.*

Proposition 4.9. *Si T est un changement de coordonnées projectif alors $\mathcal{O}_x\left(V_p^T\right)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{T(x)}\left(V_p\right)$. De même, $k_p(V_p) \cong k_p\left(V_p^T\right)$ et $\Gamma_h(V_p) \cong \Gamma_h\left(V_p^T\right)$.*

Preuve : La preuve est laissée au lecteur. $\square$

4.3 Lien projectif/affine

4.3.1 Ensemble algébrique projectif irréductible

Nous allons faire le lien entre ensemble algébrique irréductible et projective et comment passer de l'une à l'autre. Cela se fera au moyen de l'homogéinésation des polynômes. Soit I un idéal de $k[X_1,\dots,X_{n+1}]$, J un idéal de $k[X_1,\dots,X_n]$, V (resp. W) un ensemble algébrique projectif (resp. affine).

1. On pose : $I_* = \{F_*, F \in I\}$ et $J^* = \{F^*, F \in J\}$.
2. On pose : $V_* = V_a(I_p(V)_*)$ et $W^* = V_p(I_a(W)^*)$.

On a alors les propriétés suivantes qui nous permettent de passer du cas affine au cas projectif.

Proposition 4.10.
1. *Si V est un ensemble algébrique affine, alors $\phi_{n+1}(V) = V^* \cap U_{n+1}$ et $(V^*)_* = V$.*
2. *Si $V \subset W$ sont des ensemble algébrique affines, alors $V^* \subset W^*$. Et si $V \subset W$ sont des ensembles algébrique projectifs, alors $V_* \subset W_*$.*
3. *Si V est une ensemble algébrique affine irréductible, alors V^* est un ensemble algébrique projectif irréductible.*
4. *Si $V = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$ est la décomposition en irréductible de V alors $V^* = \bigcup_{i=1}^{r} V_i^*$ est la décomposition en irréductible de V^*.*
5. *Soit V un ensemble algébrique affine. V^* est le plus petit ensemble algébrique projectif contenant $\phi_{n+1}(V)$.*
6. *Si V est un ensemble algébrique affine propre, alors aucunes des composantes irréductible de V^* n'est contenu ou ne contient H_∞.*
7. *Soit V un ensemble algébrique projectif. Si aucune composantes irrédutibles de V ne contient ou n'est contenu dans H_∞, alors V_* est propre et $(V_*)^* = V$.*

Preuve : (1) on pose $I = I(V)$,

$$\phi_{n+1}(V) = \{[x_1,\dots,x_n,1],(x_1,\dots,x_n) \in V\} = \{[x_1,\dots,x_n,1], \forall P \in I, P(x_1,\dots,x_n) = 0\}$$

$$= \{[x_1,\dots,x_{n+1}], \forall P \in I, P^*(x_1,\dots,x_{n+1}) = 0 \wedge x_{n+1} \neq 0\} = V(I^*) \cap U_{n+1}.$$

Ce qui conclut. Montrons (2) et (3). D'après la proposition 2.8 on a $F \in I^*$ si et seulement si $F_* \in I$. Ce qui entraine, $I^* \subset J^*$, si et seulement si, $I \subset J$. Donc $V^* \subset W^*$. De même $V_* \subset W_*$ si ce sont des ensembles algébrique affines et $V \subset W$. Toujours d'après la proposition 2.8, si I est premier alors I^* aussi, ce qui prouve (3). De plus (4) est une conséquence de (2), (3) et (5). Montrons donc (5). Soit W un ensemble algébrique contenant $\phi_{n+1}(V)$ et $F \in I(W) \subset I(\phi_{n+1}(V))$. On a alors $F_* \in I(V)$. Il existe alors $r \in \mathbb{N}$ tel que $F = X_{n+1}^r (F_*)^* \in I(V)^*$. Donc $I(W) \subset I(V)^*$. Ce qui conclut. (6) On peut supposer que V est irréductible. Ainsi $V^* \not\subset H_\infty$ par (1) (car $\phi_{n+1}(V)$ n'est pas vide). Si $H_\infty \subset V^*$ alors $I(V)^* \subset I(V^*) \subset I(H_\infty) = (X_{n+1})$. Mais pour $F \in I(V)\setminus\{0\}$, $F^* \in I(V)^*$ avec $F^* \notin (X_{n+1})$ (car $F \neq 0$). Ainsi $H_\infty \not\subset V^*$. Ce qui est absurde. Montrons (7). On suppose une nouvelle fois que V est irréductible mais projectif. Puisque $\phi_{n+1}(V_*) \subset V$, il suffit de montrer que $V \subset (V_*)^*$. On a $(V_*)^* = V_p(I_a(V_a(I_p(V)_*))^*) = V_p((I_p(V)_*)^*)$, car $I_p(V)_*$ est radical (puisque $I_p(V)$ l'est) et d'après le théorème des zéros de Hilbert. On a $I_p(V)_*^* = \{P^*, P \in \{Q_*, Q \in I_p(V)\}\} = \{(P_*)^*; P \in I_p(V)\}$. Soit $P \in I_p(V)$.D'après la proposition 2.8, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $X_{n+1}^t(P_*)^* = P \in I_p(V)$. Puisque $I_p(V)$ est premier et $(X_{n+1}) = I_p(H_\infty) \not\subset I_p(V)$ (car $V \not\subset H_\infty$), $(P_*)^* \in I_p(V)$. Donc $(I_p(V)_*)^* \subset I_p(V)$, i.e. $V \subset (V_*)^*$. □

On a donc une bijection entre les ensemble algébrique projectif irréductible qui ne sont pas contenues dans H_∞ et les ensemble algébrique affine irréductible non vide. On appelle **fermeture algébrique** de V l'ensemble V^*.

4.3.2 Anneau local

Proposition 4.11. *Soit V un ensemble algébrique projectif irréductible et $x \in U_i \cap V$. On a $\mathcal{O}_x(V) \cong \mathcal{O}_{\phi_i^{-1}(x)}(V_*)$ en tant que k-algèbre (où V_* correspond à la déshomogénisation de V par X_i).*

Preuve : On définit la fonction $\alpha(f/g) = f_*/g_*$. Montrons qu'elle est bien défninie. Si $y = \phi_i^{-1}(x)$, alors $f(x)/g(x) = (f(x)/x_i)\,/\,(g(x)/x_i) = f_*(y)/g_*(y) = \alpha(f/g)(y)$. De plus si $f \in \Gamma_h(V)$, alors pour tout $P \in V$ $f(P) = 0$. Donc $f_* \in \Gamma(V_*)$. Donc $\alpha(f/g) \in \mathcal{O}_{\phi_i^{-1}(P)}(V_*)$. De plus si $f_1/g_1 = f_2/g_2$ et $y = \phi_i^{-1}(x)$, alors $(f_1)_*/(g_1)_*(y) = f_1(x)/g_1(x) = f_2(x)/g_2(x) = (f_2)_*(y)/(g_2)_*(y)$. Or k est algébriquement clos et est donc infini. Ainsi $(f_1)_*(g_2)_* = (f_2)_*(g_1)_*$. Donc $(f_1)_*/(g_1)_* = (f_2)_*/(g_2)_*$. Ainsi α est bien définie. Il est facile de vérifier que cette fonction est bijective avec la proposition 2.8. De plus c'est un morphisme de k-algèbre. Donc c'est un isomorphisme. □

***Corollaire* 0.1.** *Soit $x \in \mathbb{P}^2$ et i tel que $x \in U_i$. On a $\mathcal{O}_x(\mathbb{P}^2) \cong \mathcal{O}_{\phi_i^{-1}(x)}(\mathbb{A}^2)$.*

Preuve : Application directe de la proposition précédente combiné avec l'affirmation suivante : $\mathbb{P}^2_* = \mathbb{A}^2$. □

5 Courbe plane projective

5.1 Multiplicité, multiplicité d'intersection, tangente, etc.

A partir de maintenant nous travaillerons sur $\mathbb{P}^2$ et nous appelerons courbe plane projective un polynôme homogène de degré 3 ou nul. Soit $F \neq 0$ une courbe plane projective et $x \in \mathbb{P}^2$. Si $x \in U_i$ on déhomogénise F par rapport à X_i, ce que l'on note F_*. Et on appelle **multiplicité** de F en x le nombre $m_P(F) := m_{\phi_i^{-1}(P)}(F_*)$.

Proposition 5.1. *La multiplicité est indépendante du choix du U_i si $x \in U_i$.*

Preuve : Soit i, j tels que $x \in U_i \cap U_j$. Puisque la multiplicité dans le cas affine ne dépend que de l'anneau local au point considéré (le théorème 3.1) par la proposition 4.11, $m_{\phi_i^{-1}(x)}(F_*) = m_{\phi_j^{-1}(x)}(V(F_*))$. $\square$

Proposition 5.2. *Soit T un changement de coordonnée projectif. On a alors $m_{T(x)}(F) = m_x(F^T)$.*

Preuve : Soit i tel que $x \in U_i$ et $y \in \mathbb{A}^3$ tel que $[y_1, y_2, y_3] = x$. On a

$$\phi_1^{-1}(T(x)) = \left(\frac{T_2(y)}{T_1(y)}, \frac{T_3(y)}{T_1(y)}\right), \phi_2^{-1}(T(x)) = \left(\frac{T_1(y)}{T_2(y)}, \frac{T_3(y)}{T_2(y)}\right) \text{ et } \phi_3^{-1}(T(x)) = \left(\frac{T_1(y)}{T_3(y)}, \frac{T_2(y)}{T_3(y)}\right).$$

De plus par linéarité de T, $\frac{T_j(y)}{T_i(y)} = \frac{T_j(y/y_i)}{T_i(y/y_i)} = \frac{(T_j)_*(\phi_i^{-1}(x))}{(T_i)_*(\phi_i^{-1}(x))}$. Donc

$$\phi_1^{-1}(T(x)) = \left(\frac{(T_2)_*}{(T_1)_*}, \frac{(T_3)_*}{(T_1)_*}\right)(\phi_1^{-1}(x)),\ \phi_2^{-1}(T(x)) = \left(\frac{(T_1)_*}{(T_2)_*}, \frac{(T_3)_*}{(T_2)_*}\right)(\phi_2^{-1}(x))$$

$$\text{et } \phi_3^{-1}(T(x)) = \left(\frac{(T_1)_*}{(T_3)_*}, \frac{(T_2)_*}{(T_3)_*}\right)(\phi_3^{-1}(x)).$$

On note $S_1 = \left(\frac{(T_2)_*}{(T_1)_*}, \frac{(T_3)_*}{(T_1)_*}\right)$, $S_2 = \left(\frac{(T_1)_*}{(T_2)_*}, \frac{(T_3)_*}{(T_2)_*}\right)$, et $S_3 = \left(\frac{(T_1)_*}{(T_3)_*}, \frac{(T_2)_*}{(T_3)_*}\right)$ On a à travers

$$\alpha(f/g) = f^*((T_1)_*, (T_2)_*, (T_3)_*)/g^*((T_1)_*, (T_2)_*, (T_3)_*),$$

un isomorphisme :

$$\mathcal{O}_{S(z)}(V(F_*)) \cong \mathcal{O}_z(V(F((T_1)_*, (T_2)_*, (T_3)_*)), \text{ pour tout } z \in \mathbb{A}^2.$$

Ainsi, $m_{T(x)}(F) = m_{\phi_i^{-1}(T(x))}(F_*) = m_{S_i(\phi_i^{-1}(x))} = m_{\phi_i^{-1}(x)}((F^T)_*) = m_x(F^T)$. $\square$

On peut maintenant définir tout naturellement la notion de point multiple (cf. singulier) et point simple (cf. régulier). On dit qu'un point P d'une courbe projective plane est **multiple** si $m_P(F) > 1$ et sinon on dit que P est un point **simple** de F.

Proposition 5.3. *Soit F une courbe plane irréducible (i.e. $V_p(F)$ est irréductible). Si $x \in \mathbb{P}^2$ est un point simple de F, alors $\mathcal{O}_x(F)$ est un anneau de valuation discrète.*

Preuve : Se rapporter au cas affine. $\square$

On peut aussi définir la notion de tangente dans un espace projectif en se rapportant aux propriétés de la multiplicité d'intersection : la proposition 3.4. Pour ça il faut donc d'abord définir les **multiplicités d'intersections**. Soit F et G deux courbes projectives planes et $x \in F \cap G$. On note le nombre d'intersection(s) en x de F et G : $I_x(F,G) := \dim_k \left(\mathcal{O}_x\left(\mathbb{A}^2\right) / (F_*, G_*)\right)$. Puis la notion de tangente. Soit F une courbe projective plane, L une droite projective et $x \in F \cap L$. On dit que L est une **tangente** de F en x si : $I_x(F, L) > m_x(F)$. Et on a quasiment les mêmes propriétés :

Proposition 5.4. *Soit F et G deux courbes planes et $x \in \mathbb{P}^2$.*

1. *$I_x(F,G)$ est indépendant de par rapport à quelle coordonnées on déshomogénise.*

2. *$I_x(F,G) < \infty$ si et seulement si F_* et G_* s'intersectent proprement en $\phi_i^{-1}(x)$ si on déshomogénise par rapport à X_i.*
3. *$I_x(FH,G) = I_x(F,G) + I_x(H,G)$.*
4. *$I_x(F,G) \neq 0$ si et seulement si $x \in F \cap G$.*
5. *Si T est un changement de coordonnées projectives alors $I_x(F^T,G^T) = I_{T(x)}(F,G)$.*
6. *Si H est un polynôme homogène tel que $\deg(H) = \deg(G) - \deg(F)$ alors $I_x(F,G) = I_x(F, G+HF)$.*
7. *Soit $i \in \{1,2,3\}$ tel que $x \in U_i$. On a alors $I_x(F,G) = I_{\phi_i^{-1}(x)}(F_*,G_*)$.*

Preuve : Il suffit de se rapporter au cas affine. En appliquant le changement de coordonnées $T = (X_3, X_2, X_1)$, on applique une permutation sur les coordonnées. Ainsi si on déshomogénise par rapport à X_1 on a $\mathcal{O}_{T(x)}(\mathbb{P}^2) \cong \mathcal{O}_x(\mathbb{P}^2)$ et l'image de F et G dans $\mathcal{O}_{T(x)}(\mathbb{P}^2)$, via $f/g \mapsto f^T/g^T$, est F^T et G^T respectivement. Or $(F^T)_* = F(X_3,X_2,X_1)_* = F(X_3,X_2,1)$. On s'est donc ramené au cas où on déshomogénise par rapport à X_3. Ce qui montre les points (1) et (2). Le point (7) est quasiment une définition. Montrons le point (5). Soit T un changement de coordonnées projectifs. D'après ce qui précède on peut supposer que l'on déshomogénise par rapport à X_3. D'après la proposition 2.8 et le corolaire 0.1, $\mathcal{O}_{\phi_3^{-1}(x)}(\mathbb{A}^2)/((F^T)_*,(G^T)_*) \cong \mathcal{O}_x(\mathbb{P}^2)/(F^T,G^T)$. Donc $\mathcal{O}_{\phi_3^{-1}(x)}(\mathbb{A}^2)/((F^T)_*,(G^T)_*) \cong \mathcal{O}_{T(x)}(\mathbb{P}^2)/(F,G) \cong \mathcal{O}_{\phi_3(T(x))}(\mathbb{A}^2)/(F_*,G_*)$. Donc $I_x(F^T,G^T) = I_{T(x)}(F,G)$. Les autres points, laissés aux lecteurs, proviennent de la proposition 2.8, la proposition 4.10 et la proposition 3.4. $\square$

5.2 Théorème de Bézout

Proposition 5.5. *Si $F,G \in k[X,Y]$ sont deux polynômes sans composantes communes alors $F \cap G$ est fini.*

Preuve : On considère F et G comme des polynômes de $k(X)[Y]$. Puisque F et G n'ont aucune composante en commun, ils sont premiers entre eux. Ils le sont donc dans $k(X)[Y]$. On peut donc appliquer le théorème de Bézout au couple (F,G). Il existe donc $A,B \in k(X)[Y]$ tel que $AF + BG = 1$. Soit a_i les pôles de A et B (qui sont en nombres finis). Puisque $(\prod(X-a_i))\,AF + (\prod(X-a_i))\,BG = (\prod(X-a_i))$ et $(\prod(X-a_i))\,F, (\prod(X-a_i))\,G \in k[X,Y]$, si $F(x) = G(x) = 0$ alors $(\prod(x_1 - a_i)) = 0$.
Donc $\{x_1; x \in F \cap G\} \subset \{a_i, i \in I\}$. Ainsi en appliquant le même raisonnement à Y, on a $F \cap G$ est fini. $\square$

Lemme 0.1. *Soit $P(1),...,P(n) \in \mathbb{P}^2$. Il existe alors une droite L qui ne passe par aucun des $P(i)$.*

Preuve : On pose $[P(i)_1, P(i)_2, P(i)_3] = P(i)$ et $P_i = (P(i)_1, P(i)_2, P(i)_3)$. Supposons que $n = 1$. Dans ce cas on prend i tel que $P(1)_i \neq 0$ et on pose $L = X_i$. Raisonnons par récurrence : supposons que pour n'importe quel ensemble de n points il existe une droite L qui ne passe par ces points. Soit $P(1),\dots,P(n)$ n points et L une droite ne passant pas par les $P(i)$. Soit $P(n+1) \in \mathbb{P}^2$. Soit j tel que $P(n+1)_j \neq 0$. Posons $L_{bis} = aX_j$ avec $a \in k \backslash \left\{\frac{L(P_i)}{P(i)_j}, P(i)_j \neq 0\right\}$. Un tel ensemble est non vide car l'ensemble que l'on retire à k est fini et étant donné que k est algébriquement clos il est infini. Ainsi $L_{n+1} = L + L_{bis}$ ne passe par aucun des points $P(i)$. Ce qui conclut la récurrence. Ainsi l'existence d'une telle droite est établie. $\square$

Théorème **5.1.** *Soit F et G deux courbes planes projective sans composante commune.*

$$\sum_P I(P, F \cap G) = \deg(F)\deg(G)$$

Preuve : On montre qu'en fait sous un changement de coordonnées (projectif) F_* et G_* vérifie $\sum_x I(x, F_* \cap G_*) = \deg(F)\deg(G)$. Ce changement de coordonnée fait en sorte que chacun des points de $F_* \cap G_*$ se trouve dans $\mathbb{A}^2(k)$.

Puisque $F \cap G$ est fini d'après la proposition 5.5 par un changement de coordonnée projectif (possible d'après le lemme 0.1 et du fait qu'une droite projective L, correspond à une applicaition linéaire, et on créer un changement de coordonées avec $T = (X_1, \ldots, X_n, L)$) on peut supposer que $F \cap G$ ne se trouve pas sur la droite à l'infini $Z = 0$. D'après le théorème 2.1, $\dim_k k[X,Y]/(F_*, G_*) = \sum_x I(x, F \cap G)$. On pose pour la suite :

$$R = k[X,Y,Z],\ \Gamma = k[X,Y,Z]/(F,G) \text{ et } \Gamma_* = k[X,Y]/(F_*,G_*)$$

On pose $\Gamma_d = \{\pi(H); H \in k[X,Y,Z]\}$. Et $m = \deg(F)$ et $n = \deg(G)$.
Etape 1 : Montrons que $\dim_k \Gamma_d = mn$ pour tout $d \geq m+n$. Notons $\pi : R \to \Gamma$ la projection naturelle. On définit $\phi : R \times R \to R$ par $\phi(A,B) = AF + BG$ et $\psi : R \to R \times R$ par $\psi(C) = (GC, -FC)$. Le lecteur pourra montrer que la suite $R \times R \xrightarrow{\phi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \to 0$ est exacte. Montrons que $Im(\psi) = \ker(\phi)$. On a bien sûr $Im(\psi) \subset \ker(\phi)$. Soit $(A,B) \in \ker(\phi)$. On a alors $AF = -BG$. Et puisque F et G n'ont aucun facteurs en communs, F divise B et G divise A. Ainsi il existe C, D tels que $A = GC$ et $B = FD$. Ainsi $-DFG = CFG$. Donc $-D = C$ i.e. $-A = B$, ce qui conclut. La suite $0 \to R_{d-m-n} \xrightarrow{\psi} R_d \times R_{d-n} \xrightarrow{\phi} R_d \xrightarrow{\pi} \Gamma_d \to 0$ est donc exacte. Puisque $\dim R_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ et en appliquant le théorème du rang on a : $\dim \Gamma_d = mn$.
Etape 2 : On définit $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ par $\alpha\left(\overline{H}\right) = \overline{ZH}$. Soit H, A, B tels que $ZH = AF + BG$. Pour $K \in k\,[X,Y,Z]$ on note $K_0 = K(X,Y,0)$. De plus puisque F, G et Z n'ont pas de zéro en commun par le changement de variables effectué F_0 et G_0 n'ont aucune composante en commun. Ainsi $A_0F_0 = -B_0G_0$. Et donc il existe C tel que $A_0 = -G_0C$ et $B_0 = F_0C$. On pose $A_1 = A + CG$ et $B_1 = B - CF$ et on a : $(A_1)_0 = (B_1)_0 = 0$. Donc il existe A', B' tel que $A_1 = ZA'$ et $B_1 = ZB'$. On a donc $ZH = AF + BG = (A_1 - CG)F + (B_1 - CF)G = A_1F + B_1G = Z(A'F + B'G)$. Ainsi $H = A'F + B'G$. Donc α est injective.
Etape 3 : Soit $A_1, \ldots, A_{mn}$ des polynômes tels que $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_{mn}}$ est une base de Γ_d. On pose $a_i = \overline{(A_i)_*}$. α induit un isomorphisme de Γ_d dans Γ_{d+1} (car une application linéaire injective entre deux espaces de même dimensions est en fait un ismorphisme). Ainsi les résidus de $Z^rA_1, \ldots, Z^rA_{mn}$ forme une base de Γ_{d+r}.
Etape 4 : Soit $h \in \Gamma_*$, il existe $H \in k\,[X,Y]$ tel que $h = \overline{H}$. Il existe N tel que Z^NH^* est un polynôme homogène de degré $d+r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$. Donc $Z^NH^* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i Z^r A_i + BF + CG$. On a alors $H = \left(Z^NH^*\right)_* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i \left(A_i\right)_* + B_*F_* + C_*G_*$. Ainsi $h = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i$. Donc (a_i) est une base de Γ_*. Ainsi (a_i) est une famille génératrice de Γ_*. Soit λ_i tels que $\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i = 0$. On a alors

$\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i (A_i)_* = BF_* + CG_*$. Il existe donc $r, s, t \in \mathbb{N}$ tels que $Z^r \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_i = Z^s B^* F + Z^t C^* G$. Donc $\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i \overline{Z^r A_i} = 0$ dans Γ_{d+r}. Ainsi $\lambda_i = 0$. Et finalement $\dim \Gamma_d = \dim \Gamma_*$. $\square$

Dans le cas affine il faut regarder les directions asymptotiques des deux polynômes pour pouvoir conclure à la même égalité.

***Corollaire* 0.1.** *Soit $F, G \in k[X, Y]$. On note F_{max} (resp. G_{max}) le monome de degré dominant dans F (resp. G). Si $F_{max} \cap G_{max} = \emptyset$ et, F et G n'ont aucune composante en commun alors* $\sum_P I(P, F \cap G) = \deg(F) \deg(G)$.

Preuve : Puisque $F_{max} \cap G_{max} = \emptyset$ pour tout $P \in \mathbb{P}^2$, si $F^*(P) = G^*(P) = 0$ alors $P \in U_3$. Donc $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} I_P(F^*, G^*) = \sum_{P \in \mathbb{A}^{\not\in}} I_P(F, G)$. De plus F et G étant sans composante en commun, F^* et G^* le sont aussi par la proposition 2.8. On conclut par le théorème de Bézout. $\square$

6 Bibliographie

Bibliographie :

[1] *Algebraic curves*, William Fulton.

[2] *Algèbre commutative et géométrie algébrique*, Bernard le Stum.

[3] *Algebra*, Serge Lang.