1.5 Exercices

1.5.1 Topologie

Exercice 1.1
1. Soient I et J deux intervalles infinis de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une bijection entre I et J. Montrer qu'il existe une bijection continue si et seulement si I et J sont tous les deux ouverts, ou fermés bornés ou semi-ouverts. Montrer qu'alors c'est un homéomorphisme.
2. Montrer que si $m, n > 0$, il existe une bijection entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
3. Montrer qu'il existe une bijection continue $[0, 1[\to \mathbb{S}$ mais pas d'homéomorphisme.
4. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\backslash 0$ (et donc pas d'homéomorphisme).
5. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (et donc pas d'homéomorphisme).
6. Montrer [a] qu'il existe une surjection continue $[0, 1] \to [0, 1]^2$ (*courbe de Péano* par exemple) mais pas de bijection continue (et donc pas d'homéomorphisme).

a. Le résultat reste valide si on remplace $[0, 1]^2$ par n'importe quel espace compact connexe localement connexe à base dénombrable (théorème de Hahn–Mazurkiewicz).

Exercice 1.2
1. On désigne par B_n, U_n et Δ_n les groupes des matrices réelles inversibles d'ordre n qui sont respectivement triangulaires supérieures, triangulaires supérieures unipotentes (des 1 sur la diagonale) et diagonales. Montrer que la multiplication induit un homéomorphisme $\Delta_n \times \mathrm{U}_n \simeq \mathrm{B}_n$.
2. On désigne maintenant par O_n le groupe orthogonal et par $\mathrm{B}_n^+ \subset B_n$ le sous-groupe des matrices à coefficients diagonaux > 0. Montrer [a] que la multiplication induit un homéomorphisme $\mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ \simeq \mathrm{GL}_n$.

a. C'est la décomposition d'Iwasawa (ou de Gram-Schmidt).

1.5.2 Connexité, compacité

Exercice 1.3
1. Soit C (resp. C') une partie convexe compacte de $\mathbb{R}^n$ telle que $0 \in \mathring{C}$ (resp. $0 \in \mathring{C}'$).
   (a) Montrer que si $x \neq 0$, alors $[0x)$ rencontre ∂C en un unique point [a] $y =: \partial_C(x)$ et que $[0x) \cap C = [0y]$.
   (b) Montrer que l'application $f : \partial C \to \partial C', x \mapsto \partial_{C'}(x)$ est bijective.
   (c) Montrer que f se prolonge en une application bijective
   $$F : C \to C', \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|\partial_C(x)\|}\partial_{C'}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   (d) Montrer que f et F sont des homéomorphismes (on se ramènera au cas $C' = \mathbb{B}^n$).
2. En déduire que si C et C' sont des convexes compacts de même dimension finie, alors il existe un homéomorphisme $C \simeq C'$ qui induit un homéomor-

phisme $\partial C \simeq \partial C'$.

---

a. C'est la projection radiale issue de 0.

Exercice 1.4 On désigne par $a := (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Soit $x \in \mathbb{S}^n$. Montrer que si $x \neq a$, la droite (ax) rencontre $\mathbb{R}^n$ en un unique point $f(x)$ que l'on déterminera.
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{S}^n \backslash a \to \mathbb{R}^n$ est bijective et déterminer son inverse.
3. En déduire que f est un homéomorphisme [a].

---

a. C'est la projection stéréographique (sur l'hyperplan équatorial).

Exercice 1.5 — .

1. Montrer que si X est un espace topologique séparé et que $K, K' \subset X$ sont compacts disjoints, alors il existe des voisinages ouverts disjoints U et U' de K et K' dans X.
2. Soit $p : X \twoheadrightarrow X'$ une application surjective (continue) fermée à fibres compactes ($f^{-1}(x')$ compact si $x' \in X'$). Montrer que si X est séparé, alors X' aussi.
3. Soit $p : X \twoheadrightarrow X'$ une application surjective continue fermée. Montrer que si X est compact, alors X' aussi.
4. Montrer que si X est séparé (resp. compact) et $A \subset X$ est compact, alors X/A est séparé (resp. compact)

Exercice 1.6 Montrer que la *bouteille de Klein*, c'est à dire, le quotient $\mathbb{K}_2$ de $\mathbb{T}^2$ par la relation

$$(z, w) \ \mathcal{R} \ (z', w') \Leftrightarrow \begin{cases} zz' = 1 \\ w + w' = 0, \end{cases}$$

est un espace compact.

Exercice 1.7 — . Soit Z une partie de Y, $f : Z \to X$ une application continue et

$$p : X \coprod Y \twoheadrightarrow X \coprod_f Y$$

la projection.

1. Montrer que
$$\forall A \subset X, \quad p^{-1}(p(A)) = A \cup f^{-1}(A)$$
et que
$$\forall B \subset Y, \quad p^{-1}(p(B)) = f(B \cap Z) \cup f^{-1}(f(B \cap Z)) \cup B.$$
2. Montrer que p induit une *bijection* continue entre $X \coprod Y \backslash Z$ et $X \coprod_f Y$.

3. Montrer que si Z est fermé dans Y, alors p induit un homéomorphisme entre X (resp. $Y \backslash Z$) et un fermé (resp. un ouvert) de $X \coprod_f Y$.
4. Montrer que si X et Y sont séparés (resp. compacts) et Z compact, alors $X \coprod_f Y$ est séparé (resp. compact).

Exercice 1.8
1. Monter que $\mathbb{R}^n$, $\mathring{\mathbb{B}}^n$ et $\mathbb{S}^n$ sont des variétés topologiques sans bord.
2. Montrer qu'en fait, $\mathbb{R}^n \simeq \mathring{\mathbb{B}}^n$ (considérer l'application $x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$).
3. Montrer que $\mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^n$. En déduire que $[0,1]/\{0,1\} \simeq \mathbb{S}$.
4. Montrer que $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{B}^n \coprod_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathbb{B}^n$
5. Montrer que $\mathbb{S}^n/(\mathbb{S}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$.
6. Montrer que $\mathbb{B}^n/(\mathbb{B}^{n-1} \times 0) \simeq \mathbb{B}^n \vee \mathbb{B}^n$.

Exercice 1.9
1. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{S}^n/\mathcal{R}$ avec $x\, \mathcal{R} y \Leftrightarrow x + y = 0$ sur $\mathbb{S}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{P}^n$ est compact.
3. Montrer que $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{B}^n/\mathcal{R}'$ avec $x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $x + y = 0$.
4. Montrer que
$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \coprod_p \mathbb{B}^n$$
où $p : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ est l'application canonique.
5. Montrer que $\mathbb{P}^n$ est une variété topologique sans bord.
6. Montrer que l'application $f : z \to z^2$ induit un homéomorphime $\mathbb{P} \simeq \mathbb{S}$ et que
$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S} \coprod_f \mathbb{B}^2.$$

Exercice 1.10 — . Si X et Y deux espaces topologiques avec X séparé, alors la topologie [a] de $\mathcal{C}(X, Y)$ est la topologie engendrée par les ouverts
$$\mathcal{U}_{K,V} := C((X, K), (Y, U))$$
où K est compact dans X et V est ouvert dans Y.
1. Montrer que si $\varphi : X \times Y \to Z$ est une application continue avec Y séparé, alors l'application
$$\tilde{\varphi} : X \to \mathcal{C}(Y, Z), \quad x \mapsto (\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y))$$
est bien définie et continue.
2. Montrer que si X est localement compact, alors l'application
$$\mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y, \quad (f, x) \to f(x)$$
est continue.

3. En déduire que si Y est localement compact, on a une bijection (appelée curryfication)

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \simeq \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)), \quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi}.$$

---

a. Lorsque Y est un espace métrique, c'est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

1.5.3 Homotopies

Exercice 1.11 Soient $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ deux applications continues.

1. Montrer que la condition $\forall x \in X, f(x) + g(x) \neq 0$ implique que $f \sim g$.
2. Montrer que si $f(X) \cup g(X) \subsetneq \mathbb{S}^n$, alors $f \sim g$.

Exercice 1.12 Montrer qu'une application continue $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ est homotope à une application constante si et seulement si elle se prolonge en une application continue $F : \mathbb{B}^n \to X$.

Exercice 1.13

1. Montrer que $\mathbb{S}^n$ est un rétract (fort) par déformation de $\mathbb{R}^{n+1} \backslash 0$.
2. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de codimension $k+1$, alors $E \backslash H \sim \mathbb{S}^k$.

Exercice 1.14

1. Montrer que le bouquet $Y = \mathbb{S}((1,0),1) \cup \mathbb{S}((-1,0),1)$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0),(-1,0)\}$.
2. Montrer que $Y := \mathbb{S}^n \cup (0 \times \mathbb{B})$ est un rétract (fort) par déformation de $X := \mathbb{B}^{n+1} \backslash (\mathbb{S}^{n-1}(1/2) \times 0)$.

Exercice 1.15

1. Montrer que le groupe U_n est contractile et en déduire que $\Delta_n \sim \mathrm{B}_n$.
2. Montrer que le groupe B_n^+ est contractile et en déduire que $\mathrm{O}_n \sim \mathrm{GL}_n$.

1.5.4 Chemins et lacets

Exercice 1.16

1. Montrer que $\mathbb{S}^n$ est connexe (par arcs) pour $n > 0$.
2. Montrer que SO_n est connexe[a] (par arcs).
3. En déduire que, si $n > 0$, O_n a deux composantes connexes (par arcs).
4. Même chose pour GL_n.

---

a. On rappelle que tout élément de SO_n est conjugué à une matrice diagonale par blocs de taille $\leqslant 2$.

Exercice 1.17 — .

1. Montrer que l'application $[0,1] \to \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ induit une bijection entre l'ensemble des applications continues $\widehat{\gamma} : \mathbb{S} \to X$ et l'ensemble des lacets γ dans X.
2. Montrer que si γ, γ' sont deux lacets en x dans X, on a une bijection entre l'ensemble des homotopies $\widehat{h} : \widehat{\gamma} \sim_{\{1\}} \widehat{\gamma}'$ et l'ensemble des homotopies $h : \gamma \sim_{\{0,1\}} \gamma'$.
3. Montrer que si $\widehat{h} : \widehat{\gamma} \sim \widehat{\gamma}'$ est une homotopie (quelconque) et qu'on pose pour $t \in [0,1]$, $\delta(t) = \widehat{h}(1,t)$, alors $\gamma \cdot \delta \sim_{\{0,1\}} \delta \cdot \gamma'$.

Exercice 1.18 Soit γ un lacet dans X et $\widehat{\gamma} : \mathbb{S} \to X$ l'application correspondante (donnée par $\widehat{\gamma}(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. γ est trivial.
2. $\widehat{\gamma}$ est homotope relativement à 1 à une application constante.
3. $\widehat{\gamma}$ est homotope à une application constante.
4. $\widehat{\gamma}$ se prolonge en une application continue $\widetilde{\gamma} : \mathbb{B}^2 \to X$.

Exercice 1.19

1. Montrer que si γ est un chemin dans une variété topologique sans bord X, alors il existe une suite $0 = t_0 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_r = 1$ et, pour $i = 0, \ldots, r-1$, un ouvert $U_i \subset X$ homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ tel que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$.
2. En déduire que si $\dim(X) > 1$, alors γ est homotope (à extrémités fixées) à un chemin γ' dont le support est rare : $\overset{\circ}{\widehat{\mathrm{im}\,(\gamma')}} = \varnothing$.
3. En déduire que $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n \geqslant 2$.
4. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie et H un sous-espace vectoriel de codimension $\geqslant 3$, alors $E \backslash H$ est simplement connexe.