Université de Rennes 2023-2024

Topologie Algébrique
Contrôle du 15 mai 2024
13 h 15 - 14 h 15

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néanmoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement toutes les propriétés vues en CM et en TD.

Bon courage.

On considère l'action naturelle

$$\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u.$$

Pour être clair : si $u = (z, w)$, alors $\lambda u = (\lambda z, \lambda w)$. On pose alors $\mathbb{CP} := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$.

1. (2 points) Déterminer $\pi_0^{\mathrm{arc}}(\mathbb{CP})$. En déduire $\mathrm{H}_0(\mathbb{CP})$ (à isomorphisme près).

> **Solution:** Puisque $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ est connexe par arcs, il en va de même de son quotient $\mathbb{CP}$ et on a donc $\pi_0^{\mathrm{arc}}(\mathbb{CP}) \simeq \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{H}_0(\mathbb{CP}) \simeq \mathbb{Z}$.

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une forme linéaire non nulle, $D := f^{-1}(1)$, $\overrightarrow{D} := f^{-1}(0)$ et $U := (\mathbb{C}^2 \setminus \overrightarrow{D})/\mathbb{C}^\times$.

2. (3 points) Montrer que l'application quotient induit un homéomorphisme $D \simeq U$.

> **Solution:** On dispose déjà de l'application (continue) composée
>
> $$\varphi : D \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \overrightarrow{D} \twoheadrightarrow U.$$
>
> D'autre part, la rétraction (continue)
>
> $$r : \mathbb{C}^2 \setminus \overrightarrow{D} \to D, \quad u \mapsto f(u)^{-1}u$$
>
> passe au quotient (puisque f est linéaire) et induit donc une application $\psi : U \to D$. Par construction $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_D$ et on aura aussi $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_U$ car si l'on pose $\lambda = f(u)$, alors $u = \lambda r(u)$.

3. (2 points) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{CP}$ et que le complémentaire est réduit à un point.

> **Solution:** Le complémentaire est $(\overrightarrow{D} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ qui est bien réduit à un point. Et comme $\overrightarrow{D} \setminus \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, ce point est fermé. Il en résulte que U est ouvert.

4. (2 points) Montrer (en choisissant judicieusement f) que $\mathbb{CP}$ est séparé.

Solution: Si $u, v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, il existe une forme linéaire f telle que $f(u) \neq 0$ et $f(v) \neq 0$. On peut donc supposer que les images de u et v dans $\mathbb{CP}$ sont en fait dans l'ouvert U qui est homéomorphe à D, et donc à $\mathbb{C}$, et donc séparé.

5. (4 points) Montrer (en choisissant judicieusement f_1 et f_2) qu'il existe un recouvrement ouvert $\mathbb{CP} = U_1 \cup U_2$ et des homéomorphismes $U_1 \simeq \mathbb{C}$, $U_2 \simeq \mathbb{C}$ et $U_1 \cap U_2 \simeq \mathbb{C}^\times$.

Solution: On peut prendre pour f_1 et f_2 les deux projections (ou n'importe quelles formes linéaires linéairement indépendantes). Avec les notations évidentes, on aura alors bien sûr $\mathbb{CP} = U_1 \cup U_2$, $U_i \simeq D_i \simeq \mathbb{C}$ pour $i = 1, 2$ et $U_1 \cap U_2 \simeq D_1 \setminus \overrightarrow{D}_2 \simeq \mathbb{C}^\times$.

6. (2 points) Déterminer $\pi_1(\mathbb{CP}, x)$ (où x désigne un point quelconque). En déduire $\mathrm{H}_1(\mathbb{CP})$.

Solution: On utilise le théorème de van Kampen. Puisque $\mathbb{CP} = U_1 \cup U_2$ où U_1 et U_2 sont deux ouverts simplement connexes et que $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs, on sait que $\mathbb{CP}$ est simplement connexe et donc que $\pi_1(\mathbb{CP}, x) \simeq \{0\}$. On aura alors aussi $\mathrm{H}_1(\mathbb{CP}) = \{0\}$.

7. (3 points) Déterminer $\mathrm{H}_n(\mathbb{CP})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution: La suite de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert $\mathbb{CP} = U_1 \cup U_2$ se réduit à $\mathrm{H}_n(\mathbb{CP}) \simeq \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{C}^\times) \simeq \mathrm{H}_{n-1}(\mathbb{S})$ pour $n \geq 2$ et on aura donc $\mathrm{H}_2(\mathbb{CP}) \simeq \mathrm{H}_0(\mathbb{CP}) \simeq \mathbb{Z}$ et $\mathrm{H}_n(\mathbb{CP}) = 0$ sinon.

On considère l'action induite de $\mathbb{S} := \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = 1\}$ sur $\mathbb{S}^3 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \quad |z|^2 + |w^2| = 1\}$.

8. (2 points) Montrer que $\mathbb{CP}$ est compact et qu'on a un homéomorphisme $\mathbb{S}^3/\mathbb{S} \simeq \mathbb{CP}$.

Solution: Clairement, l'application composée $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}$ est surjective (et continue). Puisque $\mathbb{S}^3$ est compact et $\mathbb{CP}$ séparé, on voit que $\mathbb{CP}$ est compact. En particulier, l'application $\mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}$ est fermée et la bijection induite $\mathbb{S}^3/\mathbb{S} \simeq \mathbb{CP}$ est donc un homéomorphisme.