Université de Rennes 1 Année 2022/2023

Topologie Algébrique
Contrôle du jeudi 13 avril 2023
14 h - 15 h (tiers temps 15h20)

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néanmoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement les résultats vus en CM et en TD.

On désigne par $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité, par σ l'automorphisme du tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ donné par $(z, w) \to (z^{-1}, -w)$ et par $\mathbb{K}_2 := \mathbb{T}^2/\langle\sigma\rangle$ la *bouteille de Klein*[1].

1. (2 points) Montrer que $\mathbb{K}_2$ est compact et connexe par arcs.

Solution: Puisque $\mathbb{T}^2$ est compact et connexe par arcs, il suffit de montrer que l'application canonique $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{K}_2$ est fermée. Or si F est fermé dans $\mathbb{T}^2$, alors $p^{-1}(p(F)) = F \cup \sigma^{-1}(F)$. Puisque σ est continue, cela implique que $p^{-1}(p(F))$ est fermé dans $\mathbb{T}^2$ et il suit que $p(F)$ est fermé dans $\mathbb{K}_2$ par définition de la topologie quotient.

Soit G le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par

$$\alpha : (t, s) \mapsto (t + 1, s) \quad \text{et} \quad \beta : (t, s) \mapsto (1 - t, s + \frac{1}{2}).$$

2. (3 points) Montrer que si $n, m \in \mathbb{Z}$ et $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(\alpha^n \circ \beta^m)(t, s) = \begin{cases} (t + n, s + m/2) & \text{si } m \text{ pair} \\ (1 - t + n, s + m/2) & \text{si } m \text{ impair.} \end{cases}$$

Solution: On montre facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\alpha^n(t, s) = (t+n, s)$ et on en déduit que $\alpha^{-n}(t, s) = (t - n, s)$. Puisque $\beta^2(t, s) = (t, s + 1)$, on voit de même que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta^{2m}(t, s) = (t, s + m)$. On aura donc

$$(\alpha^n \circ \beta^{2m})(t, s) = \alpha^n(t, s + m) = (t + n, s + m)$$

et

$$(\alpha^n \circ \beta^{2m+1})(t, s) = (\alpha^n \circ \beta^{2m})(1 - t, s + 1/2) = (1 - t + n, s + 1/2 + m).$$

Les formules en résultent immédiatement.

1. On rappelle qu'un groupe de bijections Γ d'un ensemble E agit naturellement par $g \cdot x = g(x)$ et que l'on peut donc considérer le quotient E/Γ.

3. (2 points) Montrer que, si $(t,s),(t',s') \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s}) = (e^{2i\pi t'}, e^{2i\pi s'}) \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}, (\alpha^n \circ \beta^{2m})(t,s) = (t',s')$$

et

$$\sigma(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s}) = (e^{2i\pi t'}, e^{2i\pi s'}) \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}, (\alpha^n \circ \beta^{2m+1})(t,s) = (t',s').$$

Solution: On a

$$\begin{aligned}(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s}) = (e^{2i\pi t'}, e^{2i\pi s'}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{Z}, t' = t + n \\ \exists m \in \mathbb{Z}, s' = s + m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}, (\alpha^n \circ \beta^{2m})(t,s) = (t',s')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s}) = (e^{2i\pi t'}, e^{2i\pi s'}) &\Leftrightarrow \begin{cases} e^{2i\pi t'} = e^{-2i\pi t} \\ e^{2i\pi s'} = -e^{2i\pi s} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists n \in \mathbb{Z}, t' = 1 - t + n \\ \exists m \in \mathbb{Z}, s' = s + 1/2 + m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z}, (\alpha^n \circ \beta^{2m+1})(t,s) = (t',s').\end{aligned}$$

4. (2 points) En déduire un homéomorphisme $\mathbb{R}^2/G \simeq \mathbb{K}_2$.

Solution: On dispose d'une application continue surjective et ouverte

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad (t,s) \mapsto (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s}).$$

On remarque ensuite que tout élément de G s'écrit sous la forme $\alpha^n \circ \beta^m$ avec $n, m \in \mathbb{Z}$ car $\beta \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \beta$: en effet :

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad (\beta \circ \alpha)(t,s) = (1 - (t+1), s + 1/2) = (\alpha^{-1} \circ \beta)(t,s).$$

Il résulte donc de la question précédente que l'orbite de (t,s) sous l'action de G correspond à l'orbite de $(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi s})$ sous l'action de $\langle \sigma \rangle$. Il suit qu'on a une bijection $\mathbb{R}^2/G \simeq \mathbb{K}_2$ qui est nécessairement un homéomorphisme (car continue et ouverte).

5. (4 points) Montrer que l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ est proprement discontinue.

Solution: On sait déjà que G est discret et agit par homéomorphismes. On considère le disque ouvert $U(t,s)$ de centre (t,s) et de rayon $1/4$ pour $\|\ \|_\infty$. Puisque α et β sont des isométries, on aura

$$(\alpha^n \circ \beta^m)(U(t,s)) = \begin{cases} U(t+n, s+m/2) & \text{si } m \text{ pair} \\ U(1-t+n, s+m/2) & \text{si } m \text{ impair.} \end{cases}$$

Si $(t', s') \in U(t,s) \cap (\alpha^n \circ \beta^m)(U(t,s))$, alors les conditions $|s' - s| < 1/4$ et $|s' - s - m/2| < 1/4$ impliquent que $m = 0$, si bien que m est pair, et les conditions $|t' - t| < 1/4$ et $|t' - t - n| \leq 1/4$ impliquent alors que $n = 0$.

6. (2 points) En déduire un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{K}_2, \overline{1}) \simeq G$.

Solution: Puisque G agit de manière proprement discontinue sur $\mathbb{R}^2$ qui est simplement connexe, on a un isomorphisme

$$\pi_1(\mathbb{R}^2/G, \overline{0}) \simeq G$$

(ou 0 désigne la classe de $(0,0)$). Or on a vu dans la quatrième question qu'il existe un homéomorphisme $\mathbb{R}^2/G \simeq \mathbb{K}_2$ (qui envoie $\overline{0}$ sur $\overline{1}$).

7. (2 points) Calculer le commutateur $[\alpha, \beta]$ et en déduire que $G^{\mathrm{ab}} = G/\langle \alpha^2 \rangle$.

Solution: Si $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta](t,s) &= (\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1})(t,s) \\ &= (\alpha \circ \beta)(-t, s - 1/2) \\ &= (t+2, s). \\ &= \alpha^2(t,s)\end{aligned}$$

On a donc $[\alpha, \beta] = \alpha^2$. De plus $\langle \alpha^2 \rangle$ est un sous-groupe distingué car $\beta \circ \alpha^2 \circ \beta^{-1} = \alpha^{-2}$. Il suit que $G^{\mathrm{ab}} = G/\langle \alpha^2 \rangle$.

8. (3 points) Montrer que l'on a un isomorphisme $\mathrm{H}_1(\mathbb{K}_2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solution: On sait déjà que $\mathrm{H}_1(\mathbb{K}_2) \simeq \pi_1(\mathbb{K}_2, \overline{1})^{\mathrm{ab}} \simeq G^{\mathrm{ab}} \simeq G/\langle \alpha^2 \rangle$. D'autre part, si on pose $\overline{\alpha} = \alpha \mod \alpha^2$, on dispose d'une suite exacte courte

$$1 \to \langle \overline{\alpha} \rangle \to G/\langle \alpha^2 \rangle \to G/\langle \alpha \rangle \to 1.$$

Il suffit donc pour conclure de remarquer qu'on a des isomorphismes

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \langle \overline{\alpha} \rangle, \overline{1} \mapsto \overline{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} \simeq G/\langle \alpha \rangle, 1 \mapsto \overline{\beta}.$$

La suite exacte sera alors scindée car $\mathbb{Z}$ est un groupe abélien libre.