Université de Rennes 2024-2025

Topologie Algébrique
Contrôle du 14 mars 2025
16 h 45 - 17 h 45

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néanmoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement les propriétés vues en CM et en TD.

Bon courage.

1. (12 points) Soient X et Y deux espaces topologiques, $V \subset Y$, et $f : V \to X$ une application continue. On désignera par $j_1 : X \to X \coprod_f Y$ et $j_2 : Y \to X \coprod_f Y$ les applications canoniques.

   (a) (2 points) Donner *sans démonstration* les formules pour $j_1^{-1}(j_1(A))$ et $j_2^{-1}(j_1(A))$ lorsque $A \subset X$ ainsi que pour $j_1^{-1}(j_2(B))$ et $j_2^{-1}(j_2(B))$ lorsque $B \subset Y$.

   Solution: On a

   $$j_1^{-1}(j_1(A)) = A, \qquad j_2^{-1}(j_1(A)) = f^{-1}(A),$$
   $$j_1^{-1}(j_2(B)) = f(B \cap V), \qquad j_2^{-1}(j_2(B)) = B \cup f^{-1}(f(B \cap V)).$$

   (b) (2 points) Montrer que $j_1(X) \cup j_2(Y) = X \coprod_f Y$ et que $j_1(X) \cap j_2(Y) = j_2(V)$.

   Solution: La première assertion résulte de la surjectivité de la projection $p : X \coprod Y \twoheadrightarrow X \coprod_f Y$. D'autre part, si $z \in X \coprod_f Y$, on a

   $$\begin{aligned} z \in j_1(X) \cap j_2(Y) &\Leftrightarrow \exists y \in Y, z = j_2(y) \text{ et } j_2(y) \in j_1(X) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in Y, z = j_2(y) \text{ et } y \in j_2^{-1}(j_1(X)) = f^{-1}(X) = V \\ &\Leftrightarrow z \in j_2(V). \end{aligned}$$

   (c) (2 points) Montrer que si X et Y sont connexes (par arcs) et $V \neq \emptyset$, alors $X \coprod_f Y$ est aussi connexe (par arcs).

   Solution: Puisque j_1 et j_2 sont continues, $j_1(X)$ et $j_2(Y)$ sont connexes (par arcs). Or, on sait que $X \coprod_f Y = j_1(X) \cup j_2(Y)$ et $j_1(X) \cap j_2(Y) = j_2(V) \neq \emptyset$ puisque $V \neq \emptyset$. Il suit que $X \coprod_f Y$ est nécessairement connexe (par arcs).

   (d) (2 points) Montrer que j_1 est toujours injective et que, si f est injective, alors j_2 aussi est injective.

Solution: Si $x \in X$, alors $j_1^{-1}(j_1(x)) = \{x\}$ si bien que j_1 est injective. Si, de plus, f est injective et $y \in Y$, alors $f^{-1}(f(\{y\} \cap V)) \subset f^{-1}(f(y)) \subset \{y\}$ et donc $j_2^{-1}(j_2(y)) = \{y\}$ si bien que j_2 aussi est injective.

(e) (2 points) Montrer que si V est ouvert dans Y alors j_1 est ouverte et que si, de plus, f est ouverte, alors j_2 aussi est ouverte.

Solution: Si U est un ouvert de X, alors $j_1^{-1}(j_1(U)) = U$ est bien ouvert dans X et $j_2^{-1}(j_1(U)) = f^{-1}(U)$ est ouvert dans V qui est lui même ouvert dans Y par hypothèse. Il suit que $p^{-1}(j_1(U))$ est ouvert et donc $j_1(U)$ aussi.
Si on suppose de plus que f est une application ouverte et qu'on considère maintenant un ouvert U de Y, alors $j_1^{-1}(j_2(U)) = f(U \cap V)$ est ouvert et $j_2^{-1}(j_1(U)) = U \cap f^{-1}(f(U \cap V))$ aussi. Il suit que $p^{-1}(j_2(U))$ est ouvert et donc $j_2(U)$ aussi.

(f) (2 points) On suppose que V est ouvert et que f est injective et ouverte. On suppose que X et Y sont simplement connexes et que V a deux composantes connexes par arcs. Que vaut $\pi_1(X \coprod_f Y, z)$ (à isomorphisme près) ?

Solution: Puisque j_1 et j_2 sont alors des applications ouvertes, on a un recouvrement ouvert $X \coprod_f Y = j_1(X) \cup j_2(Y)$ avec $j_1(X) \cap j_2(Y) = j_2(V)$. Puisque f, j_1 et j_2 sont des applications continues injectives et ouvertes, ce sont des homéomorphismes sur leur images si bien que $j_2(V) \simeq V$ a deux composantes connexes et $j_1(X) \simeq X$, $j_2(Y) \simeq Y$ sont simplement connexes. On sait alors que $\pi_1(X \coprod_f Y, z) \simeq \mathbb{Z}$ (on peut supposer que $z \in j(V)$ puisque l'espace est connexe par arcs).

2. (12 points) (a) (2 points) Montrer que si $f : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$, alors $S := \mathbb{R} \coprod_f \mathbb{R}$ est séparé.

Solution: Comme j_2 est une application continue ouverte et injective, elle induit un homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un ouvert de S qui n'est autre que $X \setminus j_1(0)$. Il reste donc seulement à séparer $j_1(0)$ de $j_2(c)$ pour $c \in \mathbb{R}$. Il existe M, ϵ tels que $|c| < M$ et $\epsilon < 1/M$, par exemple $M = |c| + 1$ et $\epsilon = \frac{1}{2M}$. On pose alors $U_1 = j_1(]-\epsilon, \epsilon[)$ et $U_2 = j_2(]-M, M[)$. Si $|x| < \epsilon$ et $|y| < M$, alors $|xy| < 1$ et en particulier, $xy \neq 1$, ce qui montre que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. En effet, on a $j_1(x) = j_2(y)$ si et seulement si $y \in \mathbb{R}^\times$ et $x = f(y)$, c'est à dire si et seulement si $xy = 1$.

(b) (2 points) Montrer que $D := \mathbb{R} \coprod_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{R}$ (cas où f est l'inclusion) n'est pas séparé.

Solution: Si $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, on a $1/n \in \mathbb{R}^\times$ et donc $x_n := j_1(1/n) = j_2(1/n)$. Puisque $1/n \to 0$ et que j_1 et j_2 sont continues, on a simultanément $x_n \to j_1(0)$ et $x_n \to j_2(0)$, ce qui ne pourrait arriver si D était séparé.

(c) (2 points) Montrer que si $O := \{j_1(0), j_2(0)\} \subset D$, alors il existe un homéomorphisme $D/O \simeq \mathbb{R}$.

Solution: L'application composée $\mathbb{R} \overset{j_2}{\hookrightarrow} D \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} D/O$ est bien sûr continue mais aussi bijective par construction. De plus, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\pi^{-1}(\pi(j_2(U)) = j_2(U)$ est ouvert dans D. Il suit que $\pi \circ j_2$ est une application ouverte. C'est donc un homéomorphisme.

(d) (2 points) Montrer que si Z est un espace topologique séparé, alors toute application continue $\varphi : D \to Z$ se factorise en $D \twoheadrightarrow D/O \overset{\overline{\varphi}}{\to} Z$ avec $\overline{\varphi}$ continue.

Solution: Puisque φ est continue, avec $x_n := j_1(1/n) = j_2(1/n)$ comme ci-dessus, on a simultanément $\varphi(x_n) \to \varphi(j_1(0))$ et $\varphi(x_n) \to \varphi(j_2(0))$. Puisque Z est séparé, les limites sont uniques et donc $\varphi(j_1(0)) = \varphi(j_2(0))$. Il suit que φ se factorise par D/O comme annoncé.

(e) (4 points) Montrer que D et S n'ont pas le même type d'homotopie.

Solution: Une équivalence d'homotopie $\varphi : D \to S$ induit un isomorphisme de groupes $\varphi_* : \pi_1(D, x) \simeq \pi_1(S, \varphi(x))$. Mais comme φ se factorise en $D \overset{\pi}{\to} D/O \overset{\psi}{\to} Z$, alors nécessairement φ_* se factorise en

$$\pi_1(D, x) \to \pi_1(D/O, \pi(x)) \to \pi_1(S, \varphi(x)).$$

Puisque $D/O \simeq \mathbb{R}$, on a $\pi_1(D/O, \pi(x)) = \{1\}$ mais comme

$$\pi_1(D, x) \simeq \pi_1(S, \varphi(x)) \simeq \mathbb{Z},$$

on aboutit à une contradiction.