Université de Rennes 2023-2024

Topologie Algébrique
Contrôle du 14 mars 2024
16 h 45 - 17 h 45

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néanmoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement tous les résultats vus en CM et en TD. Pour la dernière question (en bonus), aucune justification n'est demandée.

Bon courage.

On désigne par $\mathbb{S}$ le cercle unité.

1. (3 points) On pose $C := [0,1]^2$ et on désigne par $\overline{C}$ le quotient de C par la relation (engendrée par)
$$\forall s \in [0,1], \quad (0,s)\ \mathcal{R}\ (1, 1-s).$$
Montrer que $\overline{C}$ est connexe par arcs et compact.

Solution: Puisque C est connexe par arcs et compact, il suffit de s'assurer que l'application continue surjective $p : C \twoheadrightarrow \overline{C}$ est fermée. Soit $V = \{(t,s) \in C \ / \ t = 0 \text{ ou } t = 1\}$ et $\sigma : V \to V, (t,s) \mapsto (1-t, 1-s)$. Alors, $p^{-1}(p(F)) = F \cup \sigma(F \cap V)$ est bien fermé si F est fermé.

2. (2 points) Soit $\Delta := \{(t,s) \in C \ / \ s = 1/2\}$ et $\overline{\Delta}$ son image dans $\overline{C}$. Montrer qu'on a un homémorphisme $\mathbb{S} \simeq \overline{\Delta}$.

Solution: On considère l'homéomorphisme
$$\phi : [0,1] \ \simeq \Delta, \quad t \mapsto (t, 1/2).$$
On a
$$\phi(t)\ \mathcal{R}\ \phi(t') \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$$
On en déduit un homéomorphisme
$$\mathbb{S} \simeq [0,1]/\{0,1\} \simeq \overline{\Delta}$$

3. (4 points) Montrer que $\overline{\Delta}$ est un rétract par déformation de $\overline{C}$.

Solution: L'application continue
$$r : C \twoheadrightarrow \Delta, \quad (t,s) \mapsto (t, 1/2)$$

est clairement une rétraction. Si $s \in [0,1]$, on a

$$r(0,s) = (0,1/2) \mathcal{R} (1,1/2) = r(1,1-s).$$

On en déduit que r induit une application continue $\overline{r} : \overline{C} \to \overline{\Delta}$ qui est aussi une rétraction. On considère maintenant l'homotopie

$$h : C \times [0,1] \to C, \quad (t,s,u) \mapsto (t,(1-u)s + u/2)$$

entre Id_C et r. Si $s \in [0,1]$, on a

$$h(0,s,u) = (0,(1-u)s+u/2) \mathcal{R} (1,1-(1-u)s-u/2)$$

$$\text{et} \quad h(1,1-s,u) = (1,(1-u)(1-s)+u/2).$$

Or, en développant, on voit que

$$(1-u)(1-s)+u/2 = 1-(1-u)s-u/2.$$

On en déduit que h induit une homotopie $\overline{h} : \overline{C} \times [0,1] \to \overline{C}$ entre $\mathrm{Id}_{\overline{C}}$ et $\overline{r}$.

4. (2 points) On pose $x = (1/2,1/2) \in C$ et on désigne par $\overline{x}$ son image dans $\overline{C}$. Déterminer $\pi_1(\overline{C},\overline{x})$. Est-ce que $\overline{C}$ est simplement connexe ?

Solution: On a $\overline{C} \sim \overline{\Delta} \simeq \mathbb{S}$ et donc $\pi_1(\overline{C},\overline{x}) \simeq \mathbb{Z}$. En particulier, $\overline{C}$ n'est pas simplement connexe.

5. (3 points) On désigne par $D := \{(t,s) \in C \ / \ s = 0 \text{ ou } s = 1\}$ et par $\overline{D}$ son image dans $\overline{C}$. Montrer qu'on a un homémorphisme $\overline{D} \simeq \mathbb{S}$.

Solution: On considère l'application continue surjective

$$u : D \twoheadrightarrow [0,1], \quad (t,s) \mapsto \frac{t+s}{2}.$$

Celle-ci induit un homéomorphisme (entre compacts)

$$\overline{D} \simeq [0,1]/\{0,1\} \simeq \mathbb{S}.$$

En effet, on aura $s = 0$ ou $s = 1$. Or, $u(0,0) = 0 \sim 1 = u(1,1)$ dans $[0,1]$ et $u(0,1) = 1/2 = u(1,0)$.

6. (4 points) On pose $x' = (1/2,0) \in C$ et on désigne par $\overline{x}'$ son image dans $\overline{C}$. Déterminer l'application composée

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S},1) \simeq \pi_1(\overline{D},\overline{x}') \to \pi_1(\overline{C},\overline{x}') \simeq \pi_1(\overline{C},\overline{x}) \simeq \pi_1(\overline{\Delta},\overline{x}) \simeq \pi_1(\mathbb{S},1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Solution: On part de $1 \in \mathbb{Z}$. Ça correspond successivement à $\gamma(t) = e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}$, puis à $t \mapsto \overline{t} \in [0,1]/\{0,1\}$, puis à

$$t \mapsto \begin{cases} \overline{(2t,0)} & t \leq 1/2 \\ \overline{(2t-1,1)} & t \leq 1/2 \end{cases} \in \overline{D} \subset \overline{C}.$$

En appliquant $\overline{r}$, on trouve

$$t \mapsto \begin{cases} \overline{(2t,1/2)} & t \leq 1/2 \\ \overline{(2t-1,1/2)} & t \leq 1/2 \end{cases} \in \overline{\Delta},$$

qui correspond à

$$t \mapsto \begin{cases} \overline{2t} & t \leq 1/2 \\ \overline{2t-1} & t \leq 1/2 \end{cases} \in [0,1]/\{0,1\},$$

et finalement

$$t \mapsto \begin{cases} e^{2i\pi 2t} & t \leq 1/2 \\ e^{2i\pi(2t-1)} & t \leq 1/2 \end{cases} = \gamma^2(t) \in \mathbb{S}$$

qui correspond à $2 \in \mathbb{Z}$. Notre application (qui est un homomorphisme) est donc la multiplication par 2.

7. (2 points) En déduire que $\overline{D}$ n'est pas un rétract par déformation de $\overline{C}$.

Solution: Sinon, l'inclusion $\overline{D} \hookrightarrow \overline{C}$ serait une équivalence d'homotopie et l'application composée ci-dessus serait l'identité.

8. (4 points) On identifie $\overline{D} \simeq \mathbb{S}$ avec le bord du disque unité fermé $\mathbb{B}^2$ et on pose

$$X = \overline{C} \coprod_{\overline{D}} \mathbb{B}^2.$$

Dire **sans justification** ce que vaut $\pi_1(X, \overline{x})$:

○ 0 ○ $\mathbb{Z}$ ○ $\mathbb{Z}^2$ ○ $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ √ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ○ Autre.

Solution: Même si ce n'est pas demandé, on peut expliquer cette réponse. On peut vérifier que $\mathbb{S}$ (resp. $\overline{D}$) est un rétract par déformation d'un ouvert de $\mathbb{B}^2$ (resp. $\overline{C}$). On applique alors le théorème de van Kampen qui, puisque $\mathbb{B}^2$ est simplement connexe, prend la forme :

$$\pi_1(X, \overline{x}) \simeq \operatorname{coker}(\pi_1(\overline{D}, x) \to \pi_1(\overline{C}, x)) \simeq \operatorname{coker}(\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$