Université de Rennes 1 Année 2022/2023

Topologie Algébrique
Contrôle du 13 mars 2023
17 h 15 - 18 h 15

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique non connecté sont autorisées. Tous les résultats doivent néammoins être justifiés et les calculs détaillés. On pourra cependant utiliser librement les résultats vus en CM et en TD. Les étudiants bénéficiant d'un aménagement pour raison médicale sont dispensés des questions 1, 2 et 8.

Bon courage.

On désigne respectivement par $\mathbb{B}^n$, $\mathring{\mathbb{B}}^n$, $\mathbb{S}^n$ et $\mathbb{P}^n$ la boule unité fermée, la boule unité ouverte, la sphère unité et l'espace projectif réels de dimension n.

Soit X un espace topologique séparé, $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ une application continue et $C_f := X \coprod_f \mathbb{B}^n$.

1. (1 point) Montrer qu'avec $f : \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^2$, on a $\mathrm{C}_f \simeq \mathbb{P}^2$ et que, pour $n > 0$, si $f : \mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ désigne la projection, alors $\mathrm{C}_f \simeq \mathbb{P}^n$.

Solution: En effet, on sait dans le premier cas que

$$\mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \coprod_f \mathbb{B}^n = C_f,$$

et dans le second que

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \coprod_f \mathbb{B}^n = C_f.$$

2. (1 point) Montrer que C_f est séparé, que l'application canonique $\mathring{\mathbb{B}}^n \to C_f$ induit un homéomorphisme avec un ouvert de C_f et que l'application canonique $X \to C_f$ induit un homéomorphisme avec le fermé complémentaire.

Solution: Puisque X et $\mathbb{B}^n$ sont séparés et $\mathbb{S}^{n-1}$ est compact, cela résulte des résultats généraux sur les recollements d'espaces topologiques le long d'une application continue.

On identifie dorénavant X et $\mathring{\mathbb{B}}^n$ avec leurs images respectives dans C_f et on pose $\mathring{M}_f = C_f \setminus 0$ (où 0 désigne le centre de la boule).

3. (3 points) Montrer que si $n \geq 2$ et $y \in \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0$, on a un isomorphisme

$$\pi_1(\mathrm{C}_f, y) \simeq \operatorname{coker}(\pi_1(\mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0, y) \to \pi_1(\mathring{M}_f, y)).$$

Solution: On considère le recouvrement ouvert $C_f = \mathring{\mathbb{B}}^n \cup \mathring{M}_f$. Puisque $n \geq 2$, $\mathring{\mathbb{B}}^n \cap \mathring{M}_f = \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0$ est connexe par arcs. De plus, $\mathring{\mathbb{B}}^n$ est contractile et donc simplement connexe. Il suffit alors d'appliquer le théorème de van Kampen.

4. (3 points) Montrer que l'application

$$g : \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad y \mapsto \frac{y}{\|y\|}$$

est une équivalence d'homotopie.

Solution: L'homotopie

$$\forall y \in \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0, \forall t \in [0,1], \quad h(y,t) = (1-t)y + t\frac{y}{2\|y\|}$$

fournit une rétraction par déformation forte

$$\mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^{n-1}(1/2), \quad y \mapsto \frac{y}{2\|y\|}.$$

Il suffit alors de composer avec l'homéomorphime

$$\mathbb{S}^{n-1}(1/2) \simeq \mathbb{S}^{n-1}, \quad y \mapsto 2y.$$

5. (3 points) Montrer que l'application

$$r : \mathring{M}_f \twoheadrightarrow X, \quad \begin{cases} x \mapsto x & \text{si } x \in X \\ y \mapsto (f \circ g)(y) & \text{si } y \in \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0 \end{cases}$$

est une rétraction par déformation forte.

Solution: Puisque C_f est muni de la topologie quotient de $X \coprod \mathbb{B}^n$, $\mathring{M}_f$ est muni de la topologie quotient de $X \coprod (\mathbb{B}^n \setminus 0)$. Pour montrer que r est continue, il suffit donc de considérer ses restrictions à X et à $\mathbb{B}^n \setminus 0$. Pour la première, c'est clair : on trouve l'identité. La seconde s'écrit

$$\mathbb{B}^n \setminus 0 \twoheadrightarrow X, \quad \begin{cases} y \mapsto f(y) & \text{si } y \in \mathbb{S}^{n-1} \\ y \mapsto (f \circ g)(y) & \text{si } y \in \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0. \end{cases}$$

C'est donc la composée de f avec l'application continue $y \mapsto y/\|y\|$ sur $\mathbb{B}^n \setminus 0$. Il sufit donc de poser

$$\forall t \in [0,1], \quad \begin{cases} h(x,t) = (1-t)x + tr(x) = x & \text{si } x \in X \\ h(y,t) = (1-t)y + tr(y) & \text{si } y \in \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0. \end{cases}$$

6. (3 points) En déduire que si $n \geq 2$, $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $x = f(y)$, on a un isomorphisme

$$\pi_1(\mathrm{C}_f, y) \simeq \operatorname{coker}(\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, y) \xrightarrow{f_*} \pi_1(X, x)).$$

Solution: Si on désigne par $i : \mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0 \hookrightarrow \mathring{M}_f$ l'application d'inclusion, on a $f \circ g = r \circ i$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathring{\mathbb{B}}^n \setminus 0, y) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "g_*"', "\simeq"] & \pi_1(\mathring{M}_f, y) \arrow[d, "r_*"', "\simeq"] \\
\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, y) \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x)
\end{tikzcd}$$

On en déduit un isomorphisme sur les conoyaux.

7. (3 points) En déduire que si $x \in \mathbb{P}^2$, on a un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{P}^2, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solution: On sait que pour $f : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{S}^1$ dans lui-même, on a $\mathrm{C}_f \simeq \mathbb{P}^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathbb{P}^2, x) &\simeq \pi_1(\mathbb{C}_f, x) \\
&\simeq \operatorname{coker}(\pi_1(\mathbb{S}^1, y) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{S}^1, x)) \\
&\simeq \operatorname{coker}(\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}) \\
&\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

8. (3 points) En déduire ensuite que si $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{P}^n$, on a un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{P}^n, x) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Solution: On a vu que si $f : \mathbb{S}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ désigne la projection, alors $\mathrm{C}_f \simeq \mathbb{P}^n$ et on a donc, par récurrence, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathbb{P}^n, x) &\simeq \operatorname{coker}(\pi_1(\mathbb{S}^{n-1}, y) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{P}^{n-1}, x)) \\
&\simeq \operatorname{coker}(\{1\} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
&\simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$