Espaces de Stone

Baptiste Dugué & Jules Givelet

Université de Rennes

25 Mai 2023

1. Algèbre de Boole et espace de Stone

2. Caractère profini des espaces de Stone

3. Compacts projectifs

Définitions d'une algèbre de Boole

Définition

Une *algèbre de Boole* est un anneau unitaire $(\mathcal{A}, +, \times, 1)$ dont tous les éléments sont idempotents.

Définition

Une *algèbre de Boole* est un treillis distributif, qui admet un plus petit et un plus grand élément, complémenté $(\mathcal{A}, \leqslant, \cap, \cup, 0, 1, \cdot^c)$.

Dictionnaire

Anneau	Treillis
$(\mathcal{A}, +, \times, 1)$ à éléments idempotents	$(\mathcal{A}, \leqslant, \cap, \cup, 0, 1, \cdot^c)$ distributif
0 (neutre pour $+$) 1 (neutre pour $\times$)	$0 = \min(\mathcal{A})$ $1 = \max(\mathcal{A})$
$x + y$ $x \times y$	$(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) = x \Delta y$ $x \cap y$
$xy = x$ xy $x + y + xy$ $x + 1$	$x \leqslant y$ $x \cap y$ $x \cup y$ x^c

Exemples d'algèbres de Boole

Exemples

- $\mathcal{P}(E)$: L'ensemble des parties d'un ensemble E.
- $OF(X)$: L'ensemble des ouverts-fermés d'un espace topologique X.

Définition

Une algèbre de Boole est dite *atomique* si tout élément est minoré par un atome *i.e* un élément dont le seul minorant strict est 0.

$OF(\mathbb{Q})$ est non-atomique.

Définitions d'un espace de Stone

Plusieurs notions distinctes permettent de définir les espaces de Stone.

Définition

- Un espace topologique est *totalement discontinu* si ses composantes connexes sont les singletons.
- Un espace topologique est *totalement séparé* si toute paire de points peut être séparée par un ouvert-fermé.
- Un espace topologique est *de dimension* 0 si ses ouverts-fermés forment une base de sa topologie.

Remarque : Toutes ces notions passent à la topologie produit et à la topologie induite.

Définitions d'un espace de Stone

Définition/Proposition

Un espace topologique **compact** est un *espace de Stone* s'il vérifie de manière équivalente n'importe laquelle des trois conditions précédentes.

Exemples d'espaces totalement discontinus

- Les espaces discrets : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Les parties de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, l'ensemble de Cantor
- Les limites inverses d'espaces finis discrets : $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Théorème de représentation de Stone (1936)

Théorème

La catégorie des espaces de Stone et la catégorie des algèbres de Boole sont anti-équivalentes.

$$\mathbf{Boole}^{\mathbf{op}} \underset{OF}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathbf{Stone}$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \begin{array}{c} S(\mathcal{A}) := \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \{0,1\}) \\ \subset \{0,1\}^{\mathcal{A}} \end{array}$$

Espaces profinis et espaces de Stone

Définition

Un espace topologique est *profini* si c'est la limite inverse d'espace finis discrets.

Proposition

Un espace topologique est profini si et seulement si c'est un espace de Stone.

Rappels

Si $(X_i, f_{i,j})_{i,j \in I}$ est un système projectif d'espaces topologiques, on définit

$$\varprojlim_{i \in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall i \geqslant j,\ f_{i,j}(x_i) = x_j \right\}$$

et on note $p_i : \varprojlim X_i \to X_i$ les projections canoniques.

Propriété universelle de la limite inverse

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[ddl, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, "\varphi_j"] \arrow[d, dotted, "\exists ! \varphi"] & \\
 & \varprojlim_{i \in I} X_i \arrow[dl, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
X_i \arrow[rr, "f_{i,j}"'] & & X_j
\end{tikzcd}
$$

Démonstration de la proposition

Proposition

Un espace topologique est profini si et seulement si c'est un espace de Stone.

$$\varprojlim_{i \in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall i \geqslant j,\ f_{i,j}(x_i) = x_j \right\}$$

Démonstration de la proposition

Proposition

Un espace topologique est profini si et seulement si c'est un espace de Stone.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "\pi"] \arrow[ddl, "\pi_\rho"'] \arrow[ddr, "\pi_{\rho'}"] & \\
 & \varprojlim X/\rho \arrow[dl, "p_\rho"] \arrow[dr, "p_{\rho'}"'] & \\
X/\rho \arrow[rr, "f_{\rho,\rho'}"'] & & X/\rho'
\end{tikzcd}
$$

Définition

Un *compact projectif* est un espace compact tel que pour toute application surjective $\pi : E \to Q$ entre compacts, on peut relever toute application $f : X \to E$ de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Q \end{tikzcd}$$

Proposition (Gleason)

Un espace compact est un compact projectif si et seulement s'il est extrêmement discontinu (l'adhérence de tout ouvert est ouvert).

Les compacts projectifs sont donc des espaces de Stone.

Proposition (Rainwater)

Un espace compact est un compact projectif si et seulement si c'est un rétracte de la compactification de Stone-Čech d'un espace discret.