

3.5 Exercices

3.5.1 Action de groupe

Exercice 3.1 — . Soit G un groupe topologique agissant continûment sur un espace topologique X .

1. Montrer que l'application quotient $p : X \rightarrow X/G$ est ouverte.
2. Montrer que si G est discret, alors l'action est continue si et seulement si c'est une action par homéomorphismes.

Exercice 3.2 — . Montrer que si H est un sous-groupe discret d'un groupe topologique G , alors l'action par translation à gauche de H sur G est proprement discontinue.

3.5.2 Revêtements

Exercice 3.3 — . Montrer que la projection

$$p : C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1 \text{ ou } y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x$$

est un homéomorphisme local mais n'est pas un revêtement.

Exercice 3.4 1. Décrire $p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{1\})$ et $p^{-1}(\mathbb{S} \setminus \{-1\})$ lorsque $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ ou $p : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.

2. En déduire dans les deux cas que p est un revêtement.
3. En déduire aussi que \mathbb{R}^n est un revêtement de \mathbb{T}^n .

Exercice 3.5 Montrer que l'application canonique $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ est un revêtement de degré 2 et que pour tout $a \in \mathbb{S}^n$, $U(a) := \{x \in \mathbb{S}^n, \|x - a\| < 1\}$ est un feuillet.

Exercice 3.6 Montrer que les applications $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ sont des revêtements.

3.5.3 Monodromie

Exercice 3.7 1. Montrer que le revêtement $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}, t \mapsto e^{2i\pi t}$ provient d'une action du groupe \mathbb{Z} et en déduire le groupe fondamental de \mathbb{S} . Même question avec $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$.

2. Montrer que le revêtement $p : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et en déduire une suite exacte reliant le groupe fondamental de \mathbb{S} et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3. Montrer que le revêtement $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ provient d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et en déduire le groupe fondamental de \mathbb{P}^n lorsque $n \geq 2$.

3.5.4 Revêtement universel

Exercice 3.8 On identifie $\pi_1(\mathbb{S}, 1)$ avec \mathbb{Z} via le degré et μ_n avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en faisant correspondre $e^{2ik\pi/n}$ et $k \pmod n$. On considère le revêtement $p_n : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}, z \mapsto z^n$.

1. Identifier l'image de p_{n*} avec un sous-groupe de \mathbb{Z} .

2. Montrer qu'il existe une application continue $f : (\mathbb{S}, 1) \rightarrow (\mathbb{S}, 1)$ telle que $p_m \circ f = p_n$ si et seulement si $m \mid n$.
3. Montrer que l'action de la monodromie de $\pi_1(\mathbb{S}, 1)$ sur μ_n est l'action naturelle de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3.9 Montrer qu'un revêtement universel est connexe.

Exercice 3.10 Quels sont les revêtements universels de \mathbb{S}^n , \mathbb{T}^n et \mathbb{P}^n .

Exercice 3.11 — . Soit $f : X' \rightarrow X''$ un morphisme de revêtements de X .

1. Montrer que si X est localement connexe et f surjective, alors f est un revêtement.
2. Montrer que si X est localement connexe par arcs et X'' est connexe, alors f est un revêtement.

Exercice 3.12 — . Soit $p : Y \rightarrow X$ un revêtement.

1. Montrer que l'ensemble $\text{Aut}(Y/X)$ des automorphismes g du revêtement est un sous-groupe de $S(Y)$.
2. Montrer que si Y est connexe et $g \in \text{Aut}(Y/X)$ a un point fixe, alors $g = \text{Id}_Y$.
3. Montrer que l'on a une (unique) factorisation $Y \rightarrow Y/\text{Aut}(Y/X) \xrightarrow{\bar{p}} X$. Lorsque \bar{p} est bijectif, on dit que p est *galoisien*.
4. Montrer que si Y est connexe et p est galoisien, alors $\text{Aut}(Y/X)$ agit de manière proprement discontinue sur Y .
5. Réciproquement, montrer que si un groupe G agit de manière proprement discontinue sur Y connexe, alors $Y \rightarrow Y/G$ est galoisien.