Problèmes de nombres

Nil Le Stum et Benjamin Mottier

22 février 2018

Table des matières

1 Les nombres aimables

Définition 1.1. *Deux nombres sont aimables lorsque la somme des diviseurs propres de chacun est égale à la valeur de chaque nombre.*

Exemples 1.2. *Voici quelques exemples de nombres aimables :*

1. *Les nombres 1184 et 1210 possèdent le même nombres de diviseurs propres.*
   En effet 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210 et ce sont les diviseurs propres de 1184 alors que les diviseurs propres de 1210 sont : 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242 et 605. Une fois additionnés, on obtient 1184 comme résultat.

2. *Les nombres 2620 et 2924 possdent le mme nombre de diviseurs propres. En effet, 1, 2, 4, 5, 10, 20, 131, 262, 524, 655 et 1310 sont les diviseurs propres de 2620 et leur somme est égale à 2924. Enfin, les diviseurs propres de 2924 sont : 1, 2, 4, 17, 34, 43, 68, 86, 172, 731 et 1462, et leur somme est égale à 2620.*

2 Les nombres parfaits

Définition 2.1. *Un nombre parfait est un nombre qui, quand on additionne tout ses diviseurs propres, donne ce nombre.*

Exemples 2.2. *Voici quelques exemples de nombres parfaits :*

1. *Le nombre* 6 *est parfait puisque la somme de ses diviseurs propres est égale à* 6 *:* $1+2+3=6$.
2. *Le nombre* 28 *est aussi parfait puisque la somme de ses diviseurs propres est égale à* 28 *:* $1+2+4+7+14=28$.
3. *Le nombre* 100 *lui n'est pas parfait puisque la somme de ses diviseurs propres (*$1,2,4,5,10,20,25,50$*) n'est pas égale à* 100 *:* $1+2+4+5+10+20+25+50=117$ *et* $117 \neq 100$.

Propriétés 2.3. *Voici quelques propriétés de nombres parfaits :*

1. *Seulement* 3 *nombres parfaits sont inférieurs à* 100.
2. *Tout les nombres parfaits sont aimables.*

Lemme 2.4. *Si* p *est un est un entier naturel, alors :*

$$1+2+4+8+\ldots+2^{p-2}+2^{p-1}=2^p-1.$$

Démonstration. On fait une démonstration par récurrence : On connaît la formule pour p = 1 : $1 = 2^1 - 1$. On suppose qu'elle est vraie pour p -1 :

$$1+2+4+8+\ldots+2^{p-3}+2^{p-2}=2^{p-1}-1$$

On a alors :

$$1+2+4+8+\ldots+2^{p-2}+2^{p-1}=2^{p-1}-1+2^{p-1}=2\times 2^{p-1}-1=2p-1 \quad \square$$

Théorème 2.5 (Euclide)**.** *Soit* p *un entier naturel. On suppose que* 2^p-1 *est premier. On pose* $n=2^{p-1}(2^p-1)$*. Alors* n *est parfait.*

Démonstration. Les diviseurs de n sont :

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{p-1}, 2^p - 1, 2(2^p - 1), 4(2^p - 1), 2^{p-2}(2^p - 1).$$

On a

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1,$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
&2^p - 1 + 2(2^p - 1) + 4(2^p - 1) + 2^{p-2}(2^p - 1) \\
&= (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{p-2})(2^p - 1) \\
&= (2^{p-1} - 1)(2^p - 1)
\end{aligned}$$

La somme des diviseurs est donc :

$$(2^{p-1} - 1)(2^p - 1) + 2^p - 1 = (1 + 2^{p-1} - 1)(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1) = n. \square$$

3 La conjecture de Goldbach

3.1 La conjecture forte de Goldbach

Conjecture 3.1. *Tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers.*

Exemples 3.2. *Voici quelques exemples de la Conjecture de Goldbach :*

1. *Le nombre* 42 *est la somme de* 19 *et* 23*.*
2. *Le nombre* 8 *est la somme de* 5 *et de* 3*.*

3.2 La conjecture faible de Goldbach

Conjecture 3.3. *Tout nombre impair supérieur ou égal à* 9 *est la somme de trois nombres premiers impairs.*

3.3 Le théorème de Goldbach

Théorème 3.4. *Si la conjecture forte est satisfaite, alors la conjecture faible aussi.*

Démonstration. Soit n un entier naturel impair supérieur ou égal à 9. Dans ce cas, $n-3$ est un entier naturel pair. Si la conjecture forte est satisfaite alors on peut crire $n-3=p+q$ avec p et q premiers. Si p ou q tait pair, alors, puisque $p+q$ est pair p et q seront pairs et donc gaux 2. On aura alors $n-3=4$ et $n=7<9$, ce qui est faux. Les nombres p et q sont alors impairs et $n=3+p+q$. □

4 La conjecture de Syracuse

Conjecture 4.1. *Prenez un nombre entier positif et appliquez lui ce traitement :*

- s'il est pair, divisez-le par 2*.*

- s'il est impair, multipliez le par 3 *et ajoutez lui* 1*.*

Vous obtenez alors un nouveau nombre sur lequel vous répétez la procédure, et ainsi de suite pour obtenir une squence de nombres. ***Quel que soit le nombre de départ, on finira toujours par obtenir le nombre*** 1***.***

Exemples 4.2. *Voici quelques exemples de la conjecture de Syracuse :*

1. *Prenons le nombre* 4*. En appliquant la conjecture de Syracuse, et en sachant que* 4 *est pair, nous faisons le calcul suivant :* $\frac{4}{2}=2$*, le nombre* 2 *est pair alors :* $\frac{2}{2}=1$*.*
2. *Prenons le nombre* 5*. En appliquant la conjecture de Syracuse, et en sachant que* 5 *est impair, nous faisons le calcul suivant :* $5\times3+1=16$*,* 16 *est pair, alors :* $\frac{16}{2}=8$*,* 8 *est pair alors :* $\frac{8}{2}=4$*,* 4 *est pair alors :* $\frac{4}{2}=2$*,* 2 *est pair alors :* $\frac{2}{2}=1$*.*