Une introduction aux diamants

Dorian Berger

Juin 2019

Introduction

Ce document est un rapport de stage écrit dans le cadre de mes études en Mathématiques. Le stage est encadré par M. Bernard Le Stum, maître de conférence à l'Institut de Recherche en Mathématiques de Rennes, que je tiens à remercier pour ses précieux conseils.
L'objectif de ce document est d'introduire au lecteur la notion de diamant, développée par Peter Scholze, médaillé Fields 2018. Pour cela, la principale référence utilisée est [Sch17]. [SW18] a aussi été très utile pour tous les chapitres de ce document.

En 1958, Alexandre Grothendieck généralise la notion de variété algébrique en introduisant les schémas, et pose ainsi la première pierre de la géométrie algébrique moderne. Sur les schémas, il définit la topologie étale, qui permet de retrouver des phénomènes liés aux variétés algébriques complexes. Comme le quotient d'un schéma par une relation étale n'est plus un schéma, ces notions devront être généralisées au fil des années suivantes. Dans cet exposé, le lecteur est supposé connaître la théorie des schémas - ou du moins, celle des espaces annelés. Si ce n'est pas le cas, il est préférable auparavant de se référer à [Gro67] par exemple. Une autre référence bien moins volumineuse, mais amplement suffisante pour la compréhension de ce document, est [LS19].

Par la suite, et dans le but de travailler sur les corps p-adiques, qui jouent un rôle majeur en théorie des nombres, les géomètres algébristes ont cherché à développer une théorie analogue à celle des espaces analytiques complexes sur des corps ultramétriques complets. L'une des approches pour ce problème est celle des espaces adiques de Huber. Les espaces adiques sont obtenus en recollant des versions raffinées de schémas affines dont les anneaux de sections sont ultramétriques.

Dans sa thèse de doctorat, Peter Scholze introduit la notion d'espace perfectoïde pour un certain nombre premier p. Ces espaces sont des espaces adiques dont les anneaux de sections sont complets et possèdent suffisamment de racines p-èmes. Cette notion permet de généraliser une construction issue de la théorie de Hodge p-adique et donne ainsi lieu à la théorie du basculement. Tout comme pour les schémas, les espaces perfectoïdes s'accompagnent d'une topologie dite pro-étale, mais le quotient d'un perfectoïde par une relation pro-étale n'est plus un perfectoïde. Afin d'y remédier, Scholze introduit la notion plus générale de diamant.

Le vocabulaire des topos, présenté en annexe, est nécessaire à la compréhension des chapitres 3 et 4.

Comme ce document ne constitue qu'une introduction, les potentiels problèmes liés à la théorie des ensembles ne seront pas pris en considération. Par conséquent, on ne parlera pas d'univers, de petite catégorie ou d'ensemble κ-petit par exemple. Pour la même raison, plusieurs démonstrations n'ont pas été rédigées, utilisant des outils nécessitant un trop long développement pour le cadre de cet exposé. Les ouvrages proposés en référence devraient satisfaire les lecteurs les plus curieux.

Table des matières

Rappels : anneaux topologiques et valuations

topologie d'anneau Sur un anneau, une *topologie d'anneau* est une topologie telle que l'addition, l'application opposée et la multiplication soient continues. Un anneau muni d'une topologique d'anneaux est un *anneau topologique*.

valuation Si R est un anneau commutatif, une *valuation* sur R est une application $v : R \to G \cup \{+\infty\}$ où G est un groupe abélien (additif) totalement ordonné telle que $v(1) = 0$, $v(0) = +\infty$, $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ et $v(fg) = v(f) + v(g)$ pour tout $f, g \in R$. Si $v : R \to G \cup \{+\infty\}$ et $v' : R \to G' \cup \{+\infty\}$ sont deux valuations sur R, on dit qu'elles sont *équivalentes* si il existe des morphismes injectifs de groupes ordonnés $\phi : G \hookrightarrow H$ et $\psi : G' \hookrightarrow H$ tels que $\phi \circ v = \psi \circ v'$. Si v est une valuation sur R, les ensembles $\{f \in R \mid v(f) > g\}$ avec $g \in G$ engendrent une topologie d'anneau sur R appelée *topologie définie par v*. Si R est un anneau topologique et v est une valuation sur R, on dit que v est *continue* si la topologie de R est plus fine que la topologie définie par v.

spectre valuatif Si R est un anneau commutatif, on note $\mathrm{Spv}(R)$ son *spectre valuatif*, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de valuations sur R. Pour une partie $E \subset R$, on note $\mathrm{Spv}(R, E) \subset \mathrm{Spv}(R)$ l'ensemble des classes d'équivalence des valuations sur R qui sont *positives* sur E.

domaine rationnel Si R est un anneau commutatif, $E \subset R$ et $f, g \in R$, l'ensemble $\{v \in \mathrm{Spv}(R, E) \mid v(f) \geq v(g) \neq +\infty\}$ est nommé *domaine rationnel élémentaire*. Un *domaine rationnel* est une intersection finie de domaines rationnels élémentaires. Les domaines rationnels élémentaires engendrent une topologie faisant de $\mathrm{Spv}(R, E)$ un espace spectral.

espace topologiquement annelé Un *espace topologiquement annelé* (resp. *espace localement topologiquement annelé*, resp. *espace topologiquement annelé valué*) est un espace topologique X muni d'un faisceau d'anneaux topologiques (resp. d'anneaux topologiques locaux, resp. d'anneaux topologiques locaux valués) O_X. Un morphisme entre deux espaces X, Y de ce type est formé d'une application continue $u : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux topologiques (resp. d'anneaux topologiques locaux, resp. d'anneaux topologiques locaux valués) $u^\sharp : O_Y \to u_* O_X$.

anneau adique Si R est un anneau commutatif et $I \subset R$ un idéal de type fini, il existe une unique topologie d'anneaux sur R telle que $\{I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ forme un système fondamental de voisinages de $0 \in R$. On l'appelle la *topologie I-adique* et on dit alors que R est un *anneau adique d'idéal de définition I*. Par exemple, un anneau commutatif muni de la topologie 0-adique (i.e. la topologie discrète) est un anneau adique. C'est aussi le cas de $\mathbb{Z}$ muni de la topologie p-adique avec $p \in \mathbb{Z}$ premier. La topologie d'un anneau adique est issue d'une semi-norme ultramétrique.

complétion Si R est un anneau muni d'une filtration $F^0 R \supset F^1 R \supset ...$, l'anneau $\varprojlim (R/F^n R)$ est le *complété* de R et est noté $\widehat{R}$. Le complété d'un anneau adique d'idéal de définition I est un anneau adique d'idéal de définition $\widehat{I} = I\widehat{R}$. Par exemple, le complété de $\mathbb{Z}$ pour la topologie p-adique est l'*anneau des entiers p-adiques* $\mathbb{Z}_p$. La complétion est une opération fonctorielle.

Chapitre 1

Espaces adiques analytiques

Ce chapitre a pour objectif d'introduire la théorie des espaces adiques de Roland Huber qui sera le cadre géométrique général de cet exposé. Les références utilisées sont [Wed12] et [LS19].

Définition 1.1. *Dans un anneau topologique commutatif R, un élément $\varpi \in R$ tel que pour tout voisinage U de $0 \in R$, il existe un voisinage V de 0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varpi^n V \subset U$ est dit* borné en puissances.
Un élément $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^n \to 0$ est dit topologiquement nilpotent.
Un élément topologiquement nilpotent inversible est appelé une pseudo-uniformisante.

Définition 1.2. *Un anneau topologique commutatif R est un* anneau de Tate *si il contient un sous-anneau adique ouvert R_0, appelé* anneau de définition, *ainsi qu'une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$.*
Un morphisme dans la catégorie des anneaux de Tate est un morphisme d'anneaux continu.

Remarque. *Tout comme pour les anneaux adiques, la topologie d'un anneau de Tate est issue d'une* semi-norme ultramétrique. *Dans la suite de l'exposé, on pourra donc parler d'anneaux de Tate* complets *ou de parties* bornées *par exemple.*

Exemple 1.3. *Un anneau adique est un anneau de Tate étant son propre anneau de définition si et seulement si sa topologie est grossière.*
Le corps $\mathbb{Q}$ muni de la topologie p-adique est un anneau de Tate.
Soit A un anneau commutatif et $\pi \in A$ qui n'est pas un diviseur de 0. Si on munit A de la topologie π-adique, π est topologiquement nilpotent. C'est donc une pseudo-uniformisante de $A[1/\pi]$, qui est un anneau de Tate.

Proposition 1.4. *Le complété d'un anneau de Tate est un anneau de Tate.*

Démonstration. Si R est un anneau de Tate d'anneau de définition R_0, alors $\widehat{R_0} \subset \widehat{R}$ est bien un anneau adique et l'image d'une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ dans $\widehat{R}$ est encore une pseudo-uniformisante. □

Exemple 1.5. *Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la topologie p-adique est un anneau de Tate. C'est le* corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$.

Dans la suite du chapitre, R désigne un anneau de Tate. On note $R^\circ \subset R$ l'anneau des éléments bornés en puissances.

Définition 1.6. *R est dit* uniforme *si R° est borné.*

Définition 1.7. *Un sous-anneau ouvert et intégralement fermé $R^+ \subset R^\circ$ est appelé* anneau d'éléments entiers de R. *Un couple (R, R^+) est une* paire de Tate.

Remarque. *Un anneau d'éléments entiers de R contient toutes les pseudo-uniformisantes de R.*

Exemple 1.8. *Soit A un anneau commutatif et $\pi \in A$ qui n'est pas un diviseur de 0. Si on munit A de la topologie π-adique, on a $A = A[1/\pi]^\circ$ et $(A[1/\pi], A)$ est donc une paire de Tate. En particulier, $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ est une paire de Tate.*

Définition 1.9. *Le* spectre adique *d'une paire de Tate (R, R^+) est l'ensemble des classes d'équivalence de valuations* continues *sur R et positives sur R^+. On le note* $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ *et on le munit de la topologie induite par celle de* $\mathrm{Spv}(R, R^+)$.

Exemple 1.10. *En reprenant l'exemple précédent, on a* $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p) = \{v_p\}$.

Définition 1.11. *Si (R, R^+) est une paire de Tate, on note le préfaisceau*

$$O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)} : U \mapsto \varprojlim_{R(f_1,\ldots,f_r/g)\subset U} \widehat{R[1/g]}$$

où $(f_1, ..., f_r)$ engendre un idéal ouvert de R et $R(f_1, ..., f_r/g)$ désigne un domaine rationnel de $\mathrm{Spa}(R, R^+)$.

Remarque. *Ce préfaisceau n'est pas toujours un faisceau mais on verra dans le chapitre suivant une condition suffisante sur R pour que ce soit le cas. Un critère bien plus précis est donné dans [BV15].*

Définition 1.12. *Un* espace affinoïde adique analytique *(resp. un* espace adique analytique*) est un espace topologiquement annelé valué qui est isomorphe (resp. localement isomorphe) à* $(\mathrm{Spa}(R, R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$.

Remarque. *La définition nécessite en particulier que* $(\mathrm{Spa}(R, R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$ *soit un espace topologiquement annelé valué, c'est-à-dire que $O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)}$ soit un faisceau.*

Chapitre 2

Espaces perfectoïdes

Les premières notions introduites par Peter Scholze sont les espaces perfecoïdes. Ceux-ci trouvent leurs origines dans sa thèse de doctorat [Sch12]. Une autre référence utile est le séminaire Bourbaki de Jean-Marc Fontaine [Fon12].

Soit p un nombre premier.

Définition 2.1. *Si R est un anneau et si I et J sont des idéaux contenant p et tels que $I^p \subset J$, on note $\Phi : R/I \to R/J$ le* morphisme de Frobenius *$x \mapsto x^p$.*

Définition 2.2. *Un anneau de Tate R est dit* perfectoïde *s'il est complet, uniforme et s'il existe une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R° et telle que $\Phi : R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ soit un isomorphisme.*

Lemme 2.3. *Soit R un anneau de Tate et $\varpi \in R$ une pseudo-uniformisante vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R°. Alors $\Phi : R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ est injectif.*

Démonstration. Si x est un élément de R°, on note $\overline{x}$ sa classe dans R°/ϖ. Soit $x \in R^\circ$ tel que $\overline{x} \in \ker(\Phi)$. Alors $\varpi^p \mid x^p$ dans R°. Donc $(x/\varpi)^p$ appartient à R° et est borné en puissances. C'est donc aussi le cas de x/ϖ. On obtient $\varpi \mid x$ dans R° et donc $\overline{x} = 0$. □

Proposition 2.4. *Soit R un anneau de Tate complet et uniforme dont une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifie $\varpi^p \mid p$ dans R°. Alors R est perfectoïde si et seulement si $\Phi : R^\circ/p \to R^\circ/p$ est surjectif.*

Démonstration. On suppose que R est perfectoïde et on prend y dans R°. Comme $\Phi : R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ est surjectif, on dispose de $x_0, y' \in R^\circ$ tels que $y = x_0^p + \varpi^p y'$. Comme $y' \in R^\circ$, on peut utiliser le même raisonnement que sur y et on obtient $y = x_0^p + \varpi^p x_1^p + \varpi^{2p} y''$. À force d'itérations, on obtient :

$$y = x_0^p + \varpi^p x_1^p + \varpi^{2p} x_2^p + \varpi^{3p} x_3^p + ...$$

où les x_i appartiennent à R°. On a alors :

$$y \equiv (x_0 + \varpi x_1 + \varpi^2 x_2 + \varpi^3 x_3 + ...)^p \pmod p$$

Ceci assure la surjectivité de $\Phi : R^\circ/p \to R^\circ/p$.

Réciproquement, on suppose que $\Phi : R^\circ/p \to R^\circ/p$ est surjectif. Soit y un élément de R°. On dispose alors de $x \in R^\circ$ tel que $p \mid x^p - y$ dans R°. Or, $\varpi^p \mid p$ dans R°. Donc $\varpi^p \mid x^p - y$ dans R° et $\Phi : R^\circ/\varpi \to R^\circ/\varpi^p$ est surjectif. D'après le lemme, c'est donc un isomorphisme et R est perfectoïde. □

Remarque. *En particulier, le fait d'être perfectoïde est indépendant du choix de la pseudo-uniformisante ϖ.*

Exemple 2.5. *Le corps $\mathbb{Q}_p$ est un anneau de Tate complet et uniforme. De plus, comme $\mathbb{Z}_p/p = \mathbb{F}_p$, le morphisme $\Phi : \mathbb{Z}_p/p \to \mathbb{Z}_p/p$ est surjectif. Pour autant, $\mathbb{Q}_p$ n'est pas perfectoïde. En effet, p ne possède pas de racine dans $\mathbb{Q}_p$. En particulier, on ne peut trouver de pseudo-uniformisante ϖ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans $\mathbb{Z}_p$. L'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ n'est pas complète mais son complété $\mathbb{Q}_p^{cycl}$ est perfectoïde.*
De la même façon, $\mathbb{F}_p((t))$, muni de la topologie t-adique, n'est pas perfectoïde. Son extension cyclotomique $\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})$ n'est pas complète mais son complété $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$ est perfectoïde.

Définition 2.6. *Un* corps perfectoïde *est un anneau de Tate perfectoïde qui est un corps.*

Remarque. *À l'origine, la définition d'un corps perfectoïde demandait de plus que le corps soit non-archimedien. Il a été montré dans [Ked18] que ceci était automatique.*

Le premier intérêt de la notion de perfectoïde est le processus de basculement. C'est ce qu'on va voir maintenant.

Définition 2.7. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde. On définit le* basculé *de R comme la limite $R^\flat = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R$.*

Proposition 2.8. *Si $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...)$ et $(y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ...)$ sont des éléments de $R^\flat$, $\lim_{n\to\infty} (x^{(i+n)} + y^{(i+n)})^{p^n}$ existe pour tout i et sera notée $z^{(i)}$. Muni de l'addition donnée par $(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ...) + (y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, ...) = (z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, ...)$, de la multiplication terme à terme et de la topologie de la limite projective, $R^\flat$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre perfectoïde.*

Démonstration. Soit $\varpi \in R$ une pseudo-uniformisante vérifiant $\varpi \mid p$ dans R°. On peut remarquer que si $x \equiv y \pmod{\varpi^n}$ pour $n > 0$ alors $x^p \equiv y^p \pmod{\varpi^{n+1}}$. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} x^p - y^p &= (y + (x-y))^p - y^p \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} y^k (x-y)^{p-k} - y^p \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} y^k (x-y)^{p-k} + (x-y)^p \end{aligned}$$

Or, comme p est premier, il divise tous les $\binom{p}{k}$ pour $k \in \{1, ..., p-1\}$. De plus, $\varpi \mid p$ et on peut donc écrire $\binom{p}{k} = \alpha_k \varpi$ avec $\alpha_k \in R$. De même, comme $x \equiv y \pmod{\varpi^n}$, on peut écrire $x - y = \beta\varpi^n$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} x^p - y^p &= \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k \varpi y^k (\beta\varpi^n)^{p-k} + (\beta\varpi^n)^p \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_k y^k (\beta\varpi^n)^{p-k-1}) \varpi^{n+1} + \beta^p \varpi^{pn} \\ &\equiv 0 \pmod{\varpi^{n+1}} \end{aligned}$$

car $pn \geq n+1$.
On montre à présent que l'application canonique $\pi : \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ \to \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi$ est un isomorphisme en construisant un inverse $\tau : \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi \to \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ$. Pour cela, on prend un élément $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, ...) \in \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi$ et pour chacun de ses termes, on choisit un représentant $x_i \in R^\circ$. En itérant n fois le résultat ci-dessus pour l'équation $x_{i+k}^{p^k} \equiv x_i \pmod{\varpi}$, on obtient $x_{n+i+k}^{p^{n+k}} \equiv x_{n+i}^{p^n} \pmod{\varpi^n}$. Or, $\varpi^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car ϖ est une pseudo-uniformisante et donc

$$x_{n+i+k}^{p^{n+k}} - x_{n+i}^{p^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{i+n}^{p^n})$ est de Cauchy et donc converge. On note sa limite $x^{(i)}$. Alors $(x^{(0)}, x^{(1)}, ...)$ est un élément de $\varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ$ noté $\tau(\overline{x_0}, \overline{x_1}, ...)$ car $(x^{(i+1)})^p = \lim x_{i+n+1}^{p^{n+1}} = \lim x_{i+n}^{p^n} = x^{(i)}$ et on a bien $\pi \circ \tau = \mathrm{Id}$ car $x_{i+n}^{p^n} \equiv x_i \pmod{\varpi}$ pour tout i. On montre maintenant que $\tau \circ \pi = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire que pour tout élément $(x_0, x_1, ...) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ$, on a $(x_0, x_1, ...) = (x^{(0)}, x^{(1)}, ...)$. C'est immédiat car, dans ce cas, $x^{(i)}$ est défini comme la limite de la suite constante $x_{i+n}^{p^n} = x_i$ pour tout i. Finalement, τ est bien un inverse de π.

Soit à présent $\varpi \in R$ une pseudo-uniformisante vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R°. On choisit $\varpi^\flat \in R^\flat$ un antécédent de la classe de ϖ pour la projection $R^{\flat\circ} \to R^\circ/\varpi^p$. Comme cette projection est multiplicative et continue, $\varpi^\flat$ est bien topologiquement nilpotent. On admet à présent que $R^\flat = R^{\flat\circ}[1/\varpi^\flat]$. $\square$

De cette démonstration, on peut extraire le résultat suivant :

Corollaire 2.9. *Si $\varpi \in R$ est une pseudo-uniformisante vérifiant $\varpi \mid p$ dans R°, on a un isomorphisme d'anneaux topologiques :*

$$R^{\flat\circ} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^\circ \cong \varprojlim_{\Phi} R^\circ/\varpi$$

De plus, il existe une pseudo-uniformisante $\varpi \in R$ vérifiant $\varpi^p \mid p$ dans R° et admettant une suite de racines p-ièmes ϖ^{1/p^n} engendrant une pseudo-uniformisante $\varpi^\flat = (\varpi, \varpi^{1/p}, \varpi^{1/p^2}, ...) \in R^\flat$. On obtient alors : $R^\flat = R^{\flat\circ}[1/\varpi^\flat]$.

Notation. *La projection sur la première coordonnée $R^\flat \to R$ sera notée $f \mapsto f^\sharp$.*

Remarque. *L'application $f \mapsto f^\sharp$ n'est pas additive mais induit un isomorphisme d'anneaux topologiques $R^{\flat\circ}/\varpi^\flat \cong R^\circ/\varpi$.*

Exemple 2.10. *On a $(\mathbb{Q}_p^{cycl})^\flat = \mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$. En effet, on a bien $(\mathbb{Q}_p^{cycl})^\circ/p = \mathbb{Z}_p[p^{1/p^\infty}]/p \cong \mathbb{F}_p[t^{1/p^\infty}]/t = \mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))^\circ/t$ où les éléments du type p^{1/p^n} sont envoyés sur t^{1/p^n}. Cet isomorphisme s'étend en une application $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty})) \to \mathbb{Q}_p^{cycl}$ qui envoie t sur p et qui sera noté $x \mapsto x^\sharp$. Alors l'application $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty})) \to (\mathbb{Q}_p^{cycl})^\flat$ définie par $x \mapsto (x^\sharp, (x^{1/p})^\sharp, ...)$ est un isomorphisme.*

Lemme 2.11. *L'ensemble des anneaux d'éléments entiers $R^+ \subset R$ est en bijection avec l'ensemble des anneaux d'éléments entiers $R^{\flat+} \subset R^\flat$ via $R^{\flat+} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} R^+$. De plus, on a $R^{\flat+}/\varpi^\flat \cong R^+/\varpi$.*

Théorème 2.12. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde de basculé $R^\flat$ et $R^+ \subset R$ un anneau d'éléments entiers de basculé $R^{\flat+} \subset R^\flat$. Si x est un élément de $\mathrm{Spa}(R, R^+)$, on définit $x^\flat \in \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+})$ par $x^\flat(f) = x(f^\sharp)$ pour tout $f \in R^\flat$. Alors l'application :*

$$\begin{gathered}\mathrm{Spa}(R, R^+) \to \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+}) \\ x \mapsto x^\flat\end{gathered}$$

est un homéomorphisme préservant les domaines rationnels.

On peut à présent étudier les perfectoïdes d'un point de vue géométrique.

Théorème 2.13. *Soit R un anneau de Tate perfectoïde, $R^+ \subset R$ un anneau d'éléments entiers et $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$. Alors O_X est un faisceau. De plus, si $U \subset X$ est un domaine rationnel, alors $O_X(U)$ est perfectoïde de basculé $O_{X^\flat}(U^\flat)$ où $X^\flat = \mathrm{Spa}(R^\flat, R^{\flat+})$ et $U^\flat \subset X^\flat$ est l'image de U par l'homéomorphisme $x \mapsto x^\flat$.*

Remarque. *Pour des démonstrations des deux théorèmes ci-dessus, voir le théorème 6.3 de [Sch12].*

Définition 2.14. *Un* espace perfectoïde affinoïde *(resp. un* espace perfectoïde*) est un espace adique qui est isomorphe (resp. localement isomorphe) à* $(\mathrm{Spa}(R, R^+), O_{\mathrm{Spa}(R,R^+)})$ *où R est perfectoïde.*

Remarque. *Si X est un espace perfectoïde, on donne un sens à $X^\flat$ en recollant les basculés des ouverts affinoïdes de X.*
On notera Perfd *la catégorie des espaces perfectoïdes et* $\mathrm{Perf} \subset \mathrm{Perfd}$ *celle des espaces perfectoïdes en caractéristique p. Toutes deux sont des sous-catégories pleines de la catégorie des espaces adiques.*

Théorème 2.15. *Si X est un espace perfectoïde, le foncteur $Y \mapsto Y^\flat$ induit une équivalence de catégories entre les espaces perfectoïdes sur X et ceux sur $X^\flat$.*

Remarque. *Ce théorème est démontré localement dans [Sch12] en tant que théorème 5.2. La démonstration utilise le langage des presque-modules.*

Définition 2.16. *Si X est un espace perfectoïde, un* débasculé *de X est un couple $(X^\sharp, i)$ où X est un espace perfectoïde et $i : X^{\sharp\flat} \to X$ est un isomorphisme.*
L'ensemble des classes d'équivalence des débasculés de X est noté $\mathrm{Untilt}(X)$.

Définition 2.17. *Un morphisme d'espaces perfectoïdes $f : Y \to X$ est une* injection *si c'est un monomorphisme. Cela signifie que, pour tout espace perfectoïde Z, l'application $f_* : \mathrm{Hom}(Z, Y) \to \mathrm{Hom}(Z, X)$ est injective.*

Notation. *On désigne généralement par* $|\bullet| : \mathrm{Perfd} \to \mathrm{Top}$ *le foncteur d'oubli.*

Définition 2.18. *Un morphisme $f : Y \to X$ d'espaces perfectoïdes est une* immersion ouverte *(resp.* immersion fermée*) si c'est une injection et que $|f|$ est une immersion localement fermée (c'est-à-dire qu'elle induit un homéomorphisme entre Y et un fermé d'un ouvert de X) ouverte (resp. fermée).*

Chapitre 3

Topologie pro-étale

Dorénavant, on considère que le lecteur connait le vocabulaire des topos présenté en annexe de ce document.

Définition 3.1. *Un morphisme d'espaces perfectoïdes* $f : Y \to X$ *est* fini étale *si l'image réciproque de tout ouvert perfectoïde affinoïde* $\mathrm{Spa}(R, R^+) \subset X$ *est un perfectoïde affinoïde* $\mathrm{Spa}(S, S^+) \subset Y$*,* $S \to R$ *est fini étale et* S^+ *est la clôture intégrale de* R^+ *dans* S*.*

Définition 3.2. *Un morphisme d'espaces perfectoïdes* $f : Y \to X$ *est* étale *si, en tout point* $y \in Y$*, on dispose d'ouverts* $U \subset X$*,* $V \subset Y$ *tels que* $f(V) \subset U$*,* $y \in V$ *et* $f\,|_V : V \to U$ *se factorise en* $V \hookrightarrow W \to U$ *où* $V \hookrightarrow W$ *est une immersion ouverte et* $W \to U$ *est fini étale.*

Remarque. *De la même manière qu'avec les schémas, on associe à un espace perfectoïde* X *son* site étale $X_{\text{ét}}$*. Le basculement préserve la topologie étale au sens suivant : sous quelques hypothèses assez peu contraignantes, si* X *est un espace perfectoïde et* $X^\flat$ *est son basculé, alors le basculement induit une équivalence de sites* $X_{\text{ét}} \cong X^\flat_{\text{ét}}$*. Voir [Sch12] théorème 7.12.*

Pour définir les diamants, on ne travaille pas avec la topologie étale mais avec la topologie dite *pro-étale* :

Définition 3.3. *Un morphisme d'espaces adiques* $f : Y \to X$ *est* affinoïde pro-étale *si* X *et* Y *sont affinoïdes et si on peut écrire* $Y = \varinjlim Y_i \to X$ *où les* Y_i *sont affinoïdes et les morphismes* $Y_i \to X$ *sont étales.*
Un morphisme d'espaces adiques $f : Y \to X$ *est* pro-étale *si, pour tout* $y \in Y$*, on dispose d'ouverts* $U \subset X$ *et* $V \subset Y$ *tels que* $y \in V$*,* $f(V) \subset U$ *et la restriction* $f\,|_V : V \to U$ *est affinoïde pro-étale.*

Proposition 3.4. *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *des morphismes d'espaces perfectoïdes. On a :*

— *Si f et g sont pro-étales, alors $g \circ f$ est pro-étale.*
— *Si g et $g \circ f$ sont pro-étales, alors f est pro-étale.*

Si $f : X \to Y$ est pro-étale et si Y est perfectoïde, alors X est perfectoïde.

Définition 3.5. *Sur les catégories* Perfd *et* Perf *on définit la* topologie pro-étale *pour laquelle une famille de morphismes $\{f_i : Y_i \to Y\}$ est couvrante si les f_i sont pro-étales et si, pour tout ouvert quasi-compact $U \subset Y$, on dispose d'un nombre* fini *d'ouverts quasi-compacts $U_i \subset Y_i$ tels que $U = \cup f_i(U_i)$.*

Remarque. *De la même manière, on peut définir $X_{\text{proét}}$ le* site pro-étale *associé à un espace perfectoïde X mais ce ne sera pas utile dans le cadre de ce document.*

Dans la suite de l'exposé, la topologie considérée sur Perfd et Perf sera la topologie pro-étale.

Exemple 3.6. *Voici quelques exemples de faisceaux sur des catégories d'espaces perfectoïdes :*

— *Le préfaisceau O sur* Perfd *défini par $X \mapsto O_X(X)$ est un faisceau.*
— *Pour un espace perfectoïde X, le préfaisceau $\widehat{X} : Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$ sur* Perfd *est un faisceau.*
— *Le préfaisceau* $\mathrm{Untilt} : X \mapsto \mathrm{Untilt}(X)$ *est un faisceau sur* Perf.

Chapitre 4

Diamants

Définition 4.1. *Si F est un faisceau sur un site C, un faisceau $R \subset F \times F$ est une* relation d'équivalence *sur F si, pour tout objet $X \in C$, l'ensemble $R(X)$ est le graphe d'une relation d'équivalence sur $F(X)$.*

Définition 4.2. *Si X est un espace perfectoïde, une relation d'équivalence R sur $\widehat{X}$ est dite* pro-étale *si R est représentable (c'est-à-dire que R est le préfaisceau représentable associé à un espace perfectoïde, lui-même noté R) et si les deux projections $R \rightrightarrows X$ sont pro-étales.*

Définition 4.3. *Un faisceau D sur* Perf *est un* diamant *si il peut s'écrire comme un quotient X/R où $X \in \mathrm{Perf}$ et R est une relation d'équivalence pro-étale sur X. Plus précisément, le quotient est effectué dans le topos $\widetilde{\mathrm{Perf}}$ et est le faisceau qui, à tout $Y \in \mathrm{Perf}$, associe l'ensemble $\mathrm{Hom}(Y, X)/\sim$ où $f \sim g$ si et seulement si il existe une unique flèche $Y \to R$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f\times g"] \arrow[dr, "\exists!"'] & X \times X \\ & R \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Remarque. *L'unicité du morphisme $Y \to R$ est assurée (sous réserve d'existence) car $R \to X \times X$ est un monomorphisme.*

Proposition 4.4. *Si D est un diamant de représentation $D = X/R$, alors le morphisme $R \to X \times_D X$ est un isomorphisme.*

Remarque. *Une démonstration se trouve dans [Sch17], proposition 11.3*

On va à présent voir le premier exemple de diamant.

Proposition 4.5. *Soit K une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dont la complétion $\widehat{K}$ est perfectoïde (on peut prendre par exemple $\widehat{K} = \mathbb{Q}_p^{cycl}$). On pose $X = \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p)$, $\widetilde{X} = \mathrm{Spa}(\widehat{K})^\flat$ et $R = \widetilde{X} \times_X \widetilde{X}$. On a :*
- *$\widetilde{X} \to X$ est pro-étale*
- *R est une relation d'équivalence pro-étale sur $\widetilde{X}$*

On note $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$ le diamant $\widetilde{X}/R$. Il ne dépend pas du choix de K.

Remarque. *Cette proposition est en fait un corollaire de la preuve du théorème 9.4.4 de [SW18].*

Définition 4.6. *Soit X un espace adique analytique sur $\mathbb{Z}_p$. On définit le préfaisceau $X^\diamondsuit$ sur Perf de la manière suivante : pour $T \in \mathrm{Perf}$, $X^\diamondsuit(T)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des débasculés de T sur X.*
Si (R, R^+) est une paire de Tate, on note $\mathrm{Spd}(R, R^+) = \mathrm{Spa}(R, R^+)^\diamondsuit$.

Théorème 4.7. *Si X est un espace adique analytique sur $\mathbb{Z}_p$ alors $X^\diamondsuit$ est un diamant.*

Remarque. *On peut faire les remarques suivantes :*
- *Ce théorème est prouvé dans [Sch17] sous le nom de lemme 15.6*
- *Si X est un espace perfectoïde, alors $X^\diamondsuit \cong X^\flat$.*
- *Cette définition coïncide avec la précédente définition de $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$. Cette équivalence permet d'identifier les espaces perfectoïdes sur $\mathbb{Q}_p$ et les espaces perfectoïdes de caractéristique p munis d'un « morphisme structurel » vers $\mathrm{Spd}(\mathbb{Q}_p)$.*
- *Il n'est en fait pas nécessaire de supposer que X soit un espace adique analytique : la construction fonctionne même si O_X n'est pas un faisceau.*
- *Cette construction encourage à renommer le faisceau Untilt en $\mathrm{Spd}(\mathbb{Z}_p)$, même si celui ci n'est pas un diamant.*

Définition 4.8. *Si D est un diamant de représentation X/R, on appelle* espace topologique sous-jacent *à D l'espace topologique $|D| = |X| \,/\, |R|$.*

Remarque. *Pour un diamant D, $|D|$ ne dépend pas du choix d'une représentation de D.*

Proposition 4.9. *Soit X un espace adique. On a $|X| \cong \left|X^\diamondsuit\right|$.*

Remarque. *Ce résultat fait aussi partie du lemme 15.6 de [Sch17].*

Annexe A

Topos

Cette annexe a pour objectif d'introduire le vocabulaire des sites et topos, dû à Alexandre Grothendieck. L'idée est de généraliser la notion d'espace topologique. Les références utilisées sont [GAV72] et [LS17].

Définition A.1. *Si C et D sont des catégories, on appelle* catégorie des préfaisceaux sur C à valeurs dans D *la catégorie* $\mathrm{Hom}(C^{op}, D)$.
On notera $\widehat{C}$ la catégorie des préfaisceaux d'ensembles*, ou tout simplement préfaisceaux, (c'est-à-dire des préfaisceaux à valeurs dans la catégorie* Set *des ensembles) sur C.*

Exemple A.2. *Si X est un espace topologique, un préfaisceau sur la catégorie* $\mathrm{Ouv}(X)$ *des ouverts de X (dont les morphismes sont les inclusions) est exactement un préfaisceau sur X.*
Si C est une catégorie et $X \in C$, on peut définir un préfaisceau $\widehat{X} : Y \mapsto$ $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *appelé* préfaisceau représentable.

Avec ce formalisme, le lemme de Yoneda peut être réécrit de la manière suivante.

Lemme de Yoneda A.3. *Soit C une catégorie. On a :*

$$\forall X \in C, \forall T \in \widehat{C}, T(X) \cong \mathrm{Hom}(\widehat{X}, T)$$

Corollaire A.4. *Soit C une catégorie. On dispose alors d'un foncteur pleinement fidèle exact à gauche :*

$$\begin{aligned} C &\hookrightarrow \widehat{C} \\ X &\mapsto \widehat{X} \end{aligned}$$

On l'appelle le plongement de Yoneda.

Théorème A.5. *Soit C une catégorie. Alors toutes les limites projectives et inductives existent dans $\widehat{C}$ et sont calculées argument par argument.*

Démonstration. On démontre que, pour tout $X \in C$, le foncteur section global :

$$\begin{gathered}\widehat{C} \to Set \\ T \mapsto T(X)\end{gathered}$$

est exact. Voir [GAV72] $\square$

Corollaire A.6. *Si T et S sont des objets de $\widehat{C}$, un morphisme $T \to S$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) si et seulement si, pour tout $X \in C$, le morphisme $T(X) \to S(X)$ est injectif (resp. surjectif).*

Proposition A.7. *La catégorie des anneaux de $\widehat{C}$ est équivalente à la catégorie des préfaisceaux d'anneaux sur C. De même avec les monoïdes, groupes, modules, etc.*

Démonstration. On utilise le fait que les foncteurs section globale et plongement de Yoneda sont exacts à gauche. $\square$

Après cette introduction, on peut commencer à faire de la topologie.

Définition A.8. *Soit C une catégorie et $X \in C$. Un* crible *de X est un sous-objet de $\widehat{X}$.*

Définition A.9. *Si T est un crible de X et $f : Y \to X$ est un morphisme, on définit f^*T comme le produit fibré $T \times_{\widehat{X}} \widehat{Y}$. C'est un crible de Y.*

Définition A.10. *Une* topologie *J sur une catégorie C est la donnée, pour tout objet $X \in C$, d'un ensemble $J(X)$ de cribles de X, dits* cribles couvrant *X, vérifiant :*
Stabilité par changement de base *: Si $T \in J(X)$ et $f : Y \to X$ est un morphisme, alors $f^*T \in J(Y)$*
Caractère local *: Soit T un crible de X. Si on dispose de $S \in J(X)$ tel que, pour tout $f \in S(Y)$, $f^*T \in J(Y)$, alors $T \in J(X)$.*
Identité *: Pour tout $X \in C$, $\widehat{X} \in J(X)$*

Définition A.11. *Un* site *est une catégorie munie d'une topologie.*

Exemple A.12. *La topologie* grossière *sur une catégorie C est la topologie définie par $J(X) = \{\widehat{X}\}$ pour tout $X \in C$.*
La topologie discrète *sur une catégorie C est la topologie définie par $J(X) = \{T \subset \widehat{X}\}$ pour tout $X \in C$.*
Si X est un espace topologique, on munit $\mathrm{Ouv}(X)$ *de la topologie telle qu'un*

crible T d'un ouvert $U \subset X$ couvre U si $\{V \in \mathrm{Ouv}(X) \mid T(V) \neq \emptyset\}$ est une famille d'ouverts recouvrant U.
On munit Top *de la topologie telle qu'un crible T d'un espace topologique X couvre X si $\{V \in \mathrm{Ouv}(X) \mid T(V) \neq \emptyset\}$ est une famille d'ouverts recouvrant X.*

Définition A.13. *Une* prétopologie *sur une catégorie C est la donnée, pour tout objet $X \in C$, d'une famille de morphismes $\{X_i \to X\}$, dite* couvrante, *vérifiant :*
Si $\{X_i \to X\}$ couvre X et $f : Y \to X$ est un morphisme, alors la famille $\{X_i \times_X Y \to Y\}$ couvre Y.
Si $\{X_i \to X\}$ couvre X et, pour tout i, la famille $\{X_{ij} \to X_i\}$ couvre X_i, alors $\{X_{ij} \to X\}$ couvre X.
$\{Id_X : X \to X\}$ est couvrante pour tout $X \in C$.

Une prétopologie sur C engendre une topologie de la manière suivante : un crible T de X couvre X si il existe une famille de morphismes $\{f_i : X_i \to X\}$ couvrante telle que $\cup Im(\widehat{f_i}) \subset T$, où $\widehat{f_i} : \widehat{X_i} \to \widehat{X}$ est le morphisme de composition induit par f_i.

Rappel. *Un morphisme de schémas $i : Y \hookrightarrow X$ est une* immersion ouverte *(resp.* immersion fermée*) si il induit un homéomorphisme entre Y et un ouvert (resp. fermé) de X et un isomorphisme (resp. épimorphisme) $i^\sharp O_X \to O_Y$.*

Exemple A.14. *Si X est un espace topologique, la topologie de* $\mathrm{Ouv}(X)$ *est engendrée par la prétopologie des recouvrements ouverts. Idem pour la topologie de* Top.
Sur la catégorie Sch *des schémas, la* topologie de Zariski *est la topologie pour laquelle une famille de morphismes $\{f_i : X_i \to X\}$ est couvrante si les f_i sont des immersions ouvertes vérifiant $\cup f_i(X_i) = X$ (pour parler de cette dernière condition, on dira que la famille est* surjective*).*

Définition A.15. *Sur un site C, un* faisceau *est un préfaisceau $F \in \widehat{C}$ vérifiant $F(X) \cong \mathrm{Hom}(R, F)$ pour tout $X \in C$ et tout crible R couvrant X.*
Si la topologie de C est engendrée par une prétopologie, un préfaisceau F est un faisceau si et seulement si la suite $F(X) \to \prod_i F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(X_i \times_X X_j)$ est exacte pour toute famille $\{X_i \to X\}$ couvrante.
On notera $\widetilde{C} \subset \widehat{C}$ la sous-catégorie pleine des faisceaux sur C.

Exemple A.16. *Si C est une catégorie munie de sa topologie grossière, tous les préfaisceaux sur C sont des faisceaux.*
Si C est une catégorie munie de sa topologie discrète, le seul faisceau sur C

est le préfaisceau constant 0.
Si X *est un espace topologique, un faisceau sur le site* $\mathrm{Ouv}(X)$ *est exactement un faisceau sur* X.
Si C *est une catégorie, la* topologique canonique *sur* C *est la topologie la plus fine pour laquelle tous les préfaisceaux représentables sont des faisceaux.*
Si C *est un site et* $\widetilde{C}$ *est muni de sa topologie canonique, alors* $\widetilde{\widetilde{C}} = \widetilde{C}$.

Théorème A.17. *Si* C *est un site, le foncteur d'inclusion* $\widetilde{C} \hookrightarrow \widehat{C}$ *possède un adjoint exact. Il est noté* $T \mapsto \widetilde{T}$ *et* $\widetilde{T}$ *est appelé* faisceau associé à T.

Remarque. *Une preuve de ce théorème est disponible dans [GAV72] II, théorème 3.4.*
En composant cet adjoint avec le plongement de Yoneda, on peut associer à chaque objet X *d'un site* C *un faisceau* $\widetilde{\widehat{X}}$, *parfois encore noté* X.

Corollaire A.18. *Soit* C *un site. Les limites inductives et projectives existent dans* $\widetilde{C}$ *et les limites projectives sont calculées argument par argument.*

On va maintenant définir la notion de topos. Grothendieck en parle en ces mots : « Cette idée englobe, dans une intuition topologique commune, aussi bien les traditionnels espaces (topologiques), incarnant le monde de la grandeur continue, que les (soit-disant) "espaces" (ou "variétés") des géomètres algébristes abstraits impénitents, ainsi que d'innombrables autres types de structures, qui jusque là avaient semblé rivées irrémédiablement au "monde arithmétique" des agrégats "discontinus" ou "discrets". » (Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, p. 54)

Définition A.19. *Un* topos *est une catégorie équivalente à la catégorie des faisceaux sur un site. Un topos est généralement muni de sa topologie canonique.*

Remarque. *Le théorème de Giraud montre que la notion de topos est en fait indépendante de celle de site. Voir [GAV72].*
La topologie d'un topos est toujours engendrée par une prétopologie (car toutes les limites finies existent et en particulier les produits fibrés).

Exemple A.20. *La catégorie* ponctuelle 1 *(qui possède un unique objet et un unique endomorphisme de cet objet) ne possède pas d'autres topologies que la topologie grossière et la topologie discrète. Munie de sa topologie grossière, son topos associé est* Set *(également nommé* topos final *ou* topos ponctuel*). Munie de sa topologie discrète (qui est en fait sa topologie canonique, ainsi que sa topologie usuelle si on remarque* $1 = \mathrm{Ouv}(\emptyset)$*), son topos associé est* 1

(également nommé topos initial *ou* topos vide*).*
Si G est un groupe, la catégorie des ensembles sur lesquels G agît forme un topos.

Définition A.21. *Soient C et D des sites et $u : C \to D$ un foncteur. On dit que u est* continu *si, pour tout faisceau $F \in \widetilde{D}$, le préfaisceau $Fu \in \widehat{C}$ est un faisceau. Le foncteur $\widetilde{D} \to \widetilde{C}$ induit par u est noté u_s.*

Exemple A.22. *Soient X un espace topologique et $U \subset X$ un ouvert. Alors le foncteur $\Phi : \mathrm{Ouv}(U) \to \mathrm{Ouv}(X)$ est continu et $\Phi_s : \widetilde{\mathrm{Ouv}(X)} \to \widetilde{\mathrm{Ouv}(U)}$ est le foncteur de restriction à U.*
Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Alors le foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$ est continu et $(f^{-1})_s : \widetilde{\mathrm{Ouv}(X)} \to \widetilde{\mathrm{Ouv}(Y)}$ est le foncteur d'image directe pour les faisceaux.

Proposition A.23. *Si $u : C \to D$ est continu et si $(X_i \to X)$ est une famille couvrante dans C, alors $(uX_i \to uX)$ est une famille couvrante dans D.*

Proposition A.24. *Si $u : C \to D$ est un foncteur continu, alors u_s possède un adjoint à gauche noté u^s.*

Remarque. *Ces deux propositions sont en fait des corollaires de la proposition 1.2 de [GAV72] III.*

Définition A.25. *Un* morphisme de sites *$D \to C$ est un foncteur continu $u : C \to D$ tel que u^s préserve les limites finies.*

Exemple A.26. *Si X et Y sont des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue alors $(f^{-1})^s : \widetilde{\mathrm{Ouv}(Y)} \to \widetilde{\mathrm{Ouv}(X)}$ est le foncteur d'image inverse pour les faisceaux et $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$ est un morphisme de sites.*

Définition A.27. *Si T et S sont des topos, un* morphisme de topos *(ou parfois* morphisme géométrique*) $f : T \to S$ est un couple de foncteurs adjoints $(f^* : S \to T, f_* : T \to S)$ où f^* est exact. De cette manière, f^* (dit* foncteur image inverse pour *f) et f_* (dit* foncteur image directe pour *f) préservent les structures algébriques.*
Si f_* est pleinement fidèle, on dit que f est un plongement*.*

Exemple A.28. *Un morphisme de topos est un morphisme de sites.*
Si C est un site, on a un plongement $\widetilde{C} \hookrightarrow \widehat{C}$.

Si on a un morphisme de sites $D \to C$ défini par $u : C \to D$, alors (u_s, u^s) définit un morphisme de topos $\widetilde{C} \to \widetilde{D}$. En particulier, si X et Y sont des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue, on a un morphisme de topos $f : \widetilde{\mathrm{Ouv}(X)} \to \widetilde{\mathrm{Ouv}(Y)}$.

On va maintenant introduire l'exemple le plus important de topologie sur la catégorie Sch des schémas.

Définition A.29. *Si A est un anneau commutatif et B est une A-algèbre commutative, on dit que B (ou $A \to B$) est de* présentation finie *si elle est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes sur A par un idéal de type fini.*

Définition A.30. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et $x \in X$. On dit que f est de* présentation finie *en x s'il existe un voisinage ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de x dans X et un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de $f(x)$ dans Y tels que $f(U) \subset V$ et $B \to A$ est de présentation finie.*
Si f est de présentation finie en tout point de X, on dit que f est localement de présentation finie*.*

Définition A.31. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On considère, pour tout schéma affine T et pour tout sous-schéma affine $T_0 \hookrightarrow T$ défini par un idéal nilpotent, tous les carrés commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
T_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
T \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y
\end{tikzcd}$$

Si la flèche diagonale existe toujours, on dit que f est formellement lisse*.*
Si la flèche diagonale est toujours unique (sous réserve d'exister), on dit que f est formellement non ramifiée*.*
Si la flèche diagonale existe toujours et est unique, on dit que f est formellement étale*.*

Définition A.32. *Un morphisme de schémas est dit* lisse *(resp.* non ramifié*, resp.* étale*) s'il est formellement lisse (resp. non ramifié, resp. étale) et localement de présentation finie.*

Remarque. *Un morphisme d'anneaux $A \to B$ est dit* lisse *(resp.* non ramifié*, resp.* étale*) si le morphisme induit* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *est lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

Proposition A.33. *Le composé de deux morphismes étales est étale.*
Si $X \to S$ et $Y \to S$ sont étales, alors tout S-morphisme $X \to Y$ est étale.

Définition A.34. *On appelle* topologie étale *sur* Sch *la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes d'un schéma sont les familles surjectives de morphismes étales.*
À tout schéma X, on associe la sous-catégorie pleine $\mathrm{\acute{E}t}_{/X}$ *de* $\mathrm{Sch}_{/X}$ *constituée des morphismes étales d'un schéma vers X. On munit* $\mathrm{\acute{E}t}_{/X}$ *de la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes sont les familles surjectives et on note $X_{\text{ét}}$ le* site étale *de X ainsi obtenu. Le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ est appelé* topos étale *de X.*

Remarque. *Par abus de langage, X vient souvent remplacer* $\mathrm{\acute{E}t}_{/X}$ *ou $X_{\text{ét}}$. Par exemple, on parle de « faisceau étale sur X » plutôt que de faisceau sur $X_{\text{ét}}$.*

Bibliographie

[BV15] Kevin Buzzard and Alain Verberkmoes. Stably uniform affinoids are sheafy. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, septembre 2015.

[Fon12] Jean-Marc Fontaine. Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids, juin 2012. Séminaire Bourbaki 1057.

[GAV72] Alexandre Grothendieck, Michael Artin, and Jean-Louis Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*. Springer-Verlag, 1972. SGA 4 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.

[Gro67] Alexandre Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1967. Inachevé.

[Ked18] Kiran S. Kedlaya. On commutative nonarchimedean banach fields. mai 2018.

[LS17] Bernard Le Stum. Cohomology and sheaves, 2017. Cours à l'Université Rennes 1.

[LS19] Bernard Le Stum. Géométrie algébrique, 2019. Cours à l'Université Rennes 1.

[Sch12] Peter Scholze. *Perfectoïd spaces*. PhD thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2012.

[Sch17] Peter Scholze. Étale cohomology of diamonds, septembre 2017.

[SW18] Peter Scholze and Jared Weinstein. Lectures on p-adic geometry, 2018. Notes de cours à UC Berkeley.

[Wed12] Torsten Wedhorn. Adic spaces. Non publié, juin 2012.