Exercices corrigés - Systèmes différentiels linéaires - résolution

Exercice 1 - Le plus facile des systèmes différentiels [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Indication

Corrigé

Exercice 2 - Diagonalisable! [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\mathbf{1.}\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x + 4y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases} \qquad \mathbf{2.}\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Indication

Corrigé

Exercice 3 - Diagonalisable...mais sur les complexes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Donner les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\mathbf{1.}\, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2.}\, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Indication

Corrigé ▶

Exercice 4 ★★★ - Systèmes non diagonalisables [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ lorsque

$$\mathbf{1}.\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2}.\ A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication ▶

Corrigé ▶

Exercice 5 ★★★ - Avec l'exponentielle de matrice [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$.
3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) & = & -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

Indication ▶

Corrigé ▶

Exercice 6 ★★★★ - Avec l'exponentielle de matrice [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$. En déduire la solution générale du sytème $X' = AX$.

Indication ▶

Corrigé ▶

Exercice 7 ★★★★ - Avec second membre [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

1. $\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t)+3x_2(t)-3t+4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t)-x_2(t)+4t-4e^{3t} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)+2x_2(t)+t \\ x_2'(t) = -4x_1(t)-3x_2(t). \end{cases}$

On donnera les solutions réelles.

Indication

Corrigé

Exercice 8 - Coefficients non constants [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1+(t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1+(2t-1)x_2. \end{cases}$$

Indication

Corrigé

Exercice 9 - Avec second membre, et pas à coefficients constants [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2tx-y+t\cos t \\ y' = x+2ty+t\sin t. \end{cases}$$

On pourra, dans le système homogène, effectuer le changement de fonctions inconnues en posant $u = xe^{-t^2}$ et $v = ye^{-t^2}$.

Indication

Corrigé

Exercice 10 - Ordre plus grand [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Résoudre le système différentiel d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = x'(t)+y'(t)-y(t) \\ y''(t) = x'(t)+y'(t)-x(t) \end{cases}$$

Indication

Corrigé

Discussions des forums

- *arithmetique*
- *Fourrier*
- *exercice algebre*

Mini-exercices.

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $x'(t) = -3x(t)$. Trouver la solution vérifiant $x(0) = 1$. Idem avec $x'(t) + x(t) = \cos t$, puis $x'(t) + x(t) = te^t$.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Même question avec $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. En déduire les solutions du système différentiel $X' = AX$.
4. Trouver les solutions du système différentiel $X' = AX$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Mini-exercices.

1. Vérifier que $\exp\left(t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$ pour tout t réel.
2. Montrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr} A}$. Commencer par le cas où A est triangulaire.
3. Soient $\Delta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $N = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que $A = \Delta + N$ est la décomposition de Dunford de A. Calculer $\exp(\Delta)$, $\exp(N)$ et $\exp(A)$.

Mini-exercices.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Trouver l'expression de la solution du système $X' = AX$ vérifiant $X(t_0) = X_0$.
2. Prouver ce résultat du cours : « L'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$ (avec $A \in M_n(\mathbb{R})$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. »
3. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la décomposition de Dunford de A. Résoudre le système différentiel $X' = AX$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
4. Soient
$$A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad D = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right), \quad P = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{smallmatrix}\right).$$
Montrer que $P^{-1}AP = D + N$ correspond à la décomposition de Dunford de A. Calculer $\exp(tD)$, $\exp(tN)$ et $\exp(tA)$. Résoudre le système différentiel $X' = AX$. Trouver la solution vérifiant $X(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Mini-exercices.

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle $x'' = x$. Trouver la solution vérifiant $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
2. Mêmes questions avec $x'' - 2x' + x = 0$. Puis $x'' + 2x' - x = 0$.
3. Trouver les solutions réelles des équations différentielles $x''' = x$, $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$ et $x''' - x'' + x' - x = 0$.
4. Trouver les suites vérifiant la relation de récurrence $u_{k+2} = 3u_{k+1} + 4u_k$. Trouver la suite vérifiant la condition initiale $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Idem avec la relation $u_{k+2} = 2u_{k+1} - u_k$, puis $u_{k+2} = -u_{k+1} - 2u_k$. Idem avec $u_{k+3} - u_{k+2} - 8u_{k+1} + 6u_k = 0$ (sans conditions initiales).

Mini-exercices.

1. Trouver les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x \end{cases}$. Montrer que les trajectoires des solutions sont des cercles centrés à l'origine.
2. Trouver les solutions du système différentiel $X' = AX$ où $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la trajectoire passant par le point $(1, 0)$.
3. Diagonaliser la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, c'est-à-dire déterminer une matrice diagonale D semblable à A. Trouver les solutions du système différentiel $X' = DX$, et tracer les trajectoires. En déduire les solutions et les trajectoires du système $X' = AX$.