Prénom Nom : Groupe :

Université de Rennes 1 2023-2024

Outils mathématiques 2
Contrôle du vendredi 23 février 2024
Début 16h45 - Durée 30mn

Mis à part le formulaire sur les développements limités, la consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion).

1. (4 points) Déterminer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 1 de
$$\frac{(1+3x)^{1/4}-1}{x}.$$

Solution: On calcule
$$\begin{aligned}(1+3x)^{1/4} &= 1 + \frac{1}{4}(3x) + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2}(3x)^2 + o(x^2)\\ &= 1 + \frac{3x}{4} - \frac{27x^2}{32} + o(x^2).\end{aligned}$$
On en déduit
$$\frac{(1+3x)^{1/4}-1}{x} = \frac{3}{4} - \frac{27x}{32} + o(x).$$

2. (6 points) Déterminer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 3 de
$$\ln(1+\sin(x))\arctan(x).$$

Solution: On calcule successivement
$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(x)) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3} + o(x^3)\\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(x))\arctan(x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)\\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

3. (4 points) Déterminer le développement limité en $x = 0$ à l'ordre 2 de $e^{\cos(x)}$.

> **Solution:**
>
> $$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = e^1 e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + o(x^2)\right) = e - \frac{ex^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

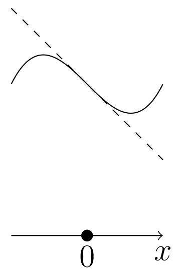
4. (2 points) Cocher le développement limité correspondant au graphe suivant. On rappelle que ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$.

   ☐ $f(x) = x - x^3 + x^3\varepsilon(x)$

   ☐ $f(x) = x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$

   ☐ $f(x) = -x - x^3 + x^3\varepsilon(x)$

   ☐ $f(x) = -x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$



> **Solution:** La bonne réponse est la dernière : $f(x) = -x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

5. (4 points) Déterminer l'intersection des plans

$$\mathcal{P}_1 : x + y + z = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : -x + y - z = 1.$$

> **Solution:** Il s'agit de résoudre le système
>
> $$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 1. \end{cases}$$
>
> On effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ sur les lignes du système :
>
> $$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2y &= 2. \end{cases}$$
>
> On obtient
>
> $$\begin{cases} x &= -z \\ y &= 1. \end{cases}$$
>
> On en déduit l'intersection des plans :
>
> $$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}.$$