Prénom Nom : **Groupe :**

Université de Rennes 1 2023-2024

Outils mathématiques 2
Contrôle du vendredi 23 février 2024
Début 16h - Durée 30mn

Mis à part le formulaire sur les développements limités, la consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion).

1. (10 points) Déterminer les développements limités suivants en $x = 0$ à l'ordre 2 :

   (a) (2 points) $\sin(x) - 1 =$

   Solution: $\sin(x) - 1 = x - 1 + o(x^2) = -1 + x + o(x^2)$.

   (b) (2 points) $\cos(x) + 1 =$

   Solution: $\cos(x) + 1 = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + 1 + o(x^2) = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

   (c) (2 points) $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} =$

   Solution: $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} = 1 + \frac{x^2}{4} + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

   (d) (2 points) $\frac{1}{\cos(x) + 1} =$

   Solution: On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)+1} &= \frac{1}{2 - \frac{x^2}{2}} + o(x^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}}\right) + o(x^2)\\ &= \frac{1}{2}(1 + \frac{x^2}{4}) + o(x^2) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

   (e) (2 points) $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1} =$

   Solution: On a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1} &= (\sin(x) - 1)\left(\frac{1}{\cos(x)+1}\right) = (-1 + x)\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8}\right) + o(x^2)\\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}) + o(x^2) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).\end{aligned}$$

2. (6 points) Déterminer le développement limité en $\pi/2$ à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x\sin(x)$.

Solution: On calcule

$$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x).$$

On a donc

$$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2}, \quad f'(\pi/2) = 1 \quad \text{et} \quad f''(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}.$$

On applique la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} f(\pi/2 + h) &= f(\pi/2) + f'(\pi/2)h + \frac{1}{2}f''(\pi/2)h^2 + o(h^2) \\ &= \frac{\pi}{2} + h - \frac{\pi}{4}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

3. (4 points) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin(x) - \tan(x)}{2x + x^2}$.

Solution: Avec la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - \tan(x)}{2x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x) - (1 + \tan^2(x))}{2 + 2x} = \frac{-2}{2} = -1.$$