# Topos de Grothendieck

Grégoire Marc

14 janvier 2021

Mémoire de séminaire encadré par Bernard le Stum.

# Introduction

Les faisceaux sont des objets fondamentaux en géométrie. Étant donné un espace topologique $X$, la notion de faisceau sur $X$ permet de donner un sens au fait que $X$ soit localement semblable à un espace, généralement affine, ayant une structure plus que topologique. L'idée intuitive ici est que nous conservons uniquement les applications continues entre $X$ et notre espace affine qui ont les bonnes propriétés nécessaires au fait de préserver la structure suplémentaire induite par un tel espace. Lorsque nous réalisons ce type de construction géométrique, l'espace topologique $X$ fait partie de la structure et le faisceau préalablement choisi sur $X$ permet de la raffiner. Il est alors naturel d'étudier les faisceaux dans leur ensemble et de chercher à comprendre quelles sont les informations topologiques conservées à l'intérieur de ces objets en oubliant l'espace de départ. Les catégories de faisceaux se rélévent alors comme étant des objets géométriques à part entière dont le cadre général, celui des topos, dépasse celui des espaces topologiques. Derrière Les topos se cache alors une intuition géométrique pronfonde gouvernée par la notion de recouvrement et de recollement. Bien qu'ils apparaissent tout de même de façon native, les points ne font alors plus partie de la définition de base d'espace et jouent alors un rôle plus pur et non altéré par le côté ensembliste des espaces topologiques. Le but de ce document est définir la notion de topos et de tenter de comprendre les liens qu'elle entretient avec celle d'espace topologique. Pour cela, nous commencerons par donner un sens à la notion de faisceau sur un site. Puis nous discuterons quelques propriétés des catégories de faisceaux. Enfin nous étudierons les liens entre la catégorie des topos et celle des espaces topologiques. Pour cela nous commencerons par étudier quelles sont les informations topologiques préservées par les topos. Finalement nous verrons de quelle façon les topos cachent une intuition géométrique.

# Table des matières

# 1 Faisceau sur un site

Le but de cette partie est de généraliser la notion de faisceau. Un faisceau dans le sens usuel est un foncteur contravariant $F : \mathrm{Ouv}(X) \to \mathbf{Ens}$ où $\mathrm{Ouv}(X)$ est la catégorie des ouverts de $X$ en tant qu'ensemble ordonné. Pour mériter le titre de faisceau, $F$ doit également vérifier des conditions de recollements sur les ouverts de recouvrements. Lorsque nous remplaçons $\mathrm{Ouv}(X)$ par une catégorie quelconque $\mathcal{C}$, la notion de préfaisceau fait toujours sens mais il faut en donner à celle de recouvrement.[1] Pour cela, il faut dans un premier temps introduire la notion de crible. Dans la suite nous noterons $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ ainsi que $h_A$ le préfaisceau représenté par $A$. En vertue du lemme de Yoneda, nous ferons parfois la confusion entre $h_A$ et $A$.

## 1.1 Crible

**Définition 1.1.1.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A$ un objet de $\mathcal{C}$. Un *crible* $S$ de $A$ est un sous-préfaisceau de $h_A$.

*Remarque* 1.1.2. Si nous considérons $h_A$ comme l'ensemble des flèches de but $A$, un crible de $A$ est simplement un ensemble de flèches de but $A$ stable par composition à gauche de flèches quelconques.

Dans le cas de figure où $X$ est un espace topologique et $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de $X$, si $U$ est un ouvert de $X$, un crible de $U$ est un ensemble d'ouverts inclus dans $U$ qui contient tout ouvert inclus dans un de ses ouverts. Ici les ouverts sont représentés par les inclusions, les cribles étant des ensembles de flèches et non d'objets. Nous pouvons alors garder en tête que les flèches de la catégorie $\mathcal{C}$ sur laquelle nous allons considérer des faisceaux réprésentent en un certain sens des inclusions d'ouverts et les applications d'ensembles correspondantes des morphismes de restrictions. L'intérêt de la notion de crible est qu'ils représentent en un certain sens « des collections d'ouverts munis de la topologie induite ». En effet, la notion de recouvrement que nous voulons définir est directement liée à celle de faisceau. Intuitivement, les sections d'un faisceau sont des objets qui peuvent être définies localement quite à garder une certaine cohérence. Ce fait implique que la notion de recouvrement doit plus être interprétée comme « un ensemble d'espaces dont la réunion est l'espace total » plutôt qu'uniquement comme « un ensemble d'ouverts qui recouvrent l'espace ». C'est la raison pour laquelle les cribles sont stables par précomposition. Il faut maintenant donner un sens à la notion de « crible couvrant ». Les cribles couvrants sont les cribles qui vont jouer par la suite le rôle de recouvrement. Intuitivement ce sont les cribles dont les ouverts sous-jacents récouvrent l'espace. Le choix de tels cribles doit être cohérent et doit respecter certains axiomes qui viennent naturellement avec la notion de recouvrement.

## 1.2 Topologie de Grothendieck

**Définition 1.2.1.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. *Une topologie de Grothendieck* sur $\mathcal{C}$ et la donnée pour tout objet $A$ de $\mathcal{C}$ d'un ensemble $J(A)$ de cribles de $A$ tel que les axiomes suivants soient vérifiés :

1. pour tout objet $A$, $A$ appartient à $J(A)$ ;
2. pour tous objets $A$ et $B$, tout crible $S$ de $B$ et toute flèche $h : A \to B$, si $S$ appartient à $J(B)$ alors $S \times_B A$ appartient à $J(A)$ ;
3. pour tout objet $B$, tous cribles $S$ et $R$ de $B$, si $S \in J(B)$ et que pour tout $h : A \to B$ dans $S$, $R \times_B A$ apppartient à $J(A)$, alors $R$ appartient aussi à $J(B)$.

1. Un préfaisceau est simplement un foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$.

Un couple $(\mathcal{C}, J)$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie et $J$ une topologie de Grothendieck est un *site*. Les cribles de $J(A)$ sont appelés *cribles couvrants de* $A$.

Le premier axiome joue le rôle d'axiome d'existence, tout espace se doit d'être recouvert par lui même. Le deuxième correspond à l'idée que l'information locale est préservée. Un recouvrement d'un espace se doit de recouvrir également les espaces plus petits. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que le fait de « conserver la topologie induite sur les ouverts » dans la définition de crible joue un rôle important ici. Enfin, le dernier axiome donne le caractére local de la notion de recouvrement, pour être un recouvrement, il suffit d'en être un sur chaque ouvert d'un autre recouvrement. Plusieurs notions viennent alors naturellement avec celle de topologie de Grothendieck. Nous pouvons par exemple définir un crible en complétant un ensemble de flèches par composition à gauche. Si le crible engendré par cet ensemble de flèches est un crible couvrant nous dirons que cet ensemble est un *recouvrement*. Nous retrouvons alors l'intuition classique des recouvrements pour les espaces topologiques. Une autre notion naturelle est celle de rafinement. Un *rafinement* d'un crible couvrant étant simplement un autre crible couvrant inclus dans le premier. Nous verrons par la suite que cette notion est utile pour « faisceautiser » des préfaisceaux qui ne sont pas des faisceaux.

*Remarque* 1.2.2. Si $R$ et $S$ sont des cribles couvrants de $A$, alors $R \cap S$ est un cible couvrant de $A$. Il est donc possible de trouver un rafinement commun à toute paire de cribles couvrants.

*Exemple* 1.2.3. Si $X$ est un espace topologique, les cribles engendrés par les recouvrements d'ouverts de $X$ forment une topologie de Grothendieck sur la catégorie $\mathrm{Ouv}(X)$.

## 1.3 Faisceau sur un site

La notion de faisceau peut être alors définie de manière naturelle de la façon suivante.

**Définition 1.3.1.** Soit $(\mathcal{C}, J)$ un site. Un préfaisceau $F$ sur $\mathcal{C}$ est un *faisceau* si pour tout objet $A$ et tout crible couvrant $S$ de $A$, l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}(A, F) \to \mathrm{Hom}(S, F)$$

est bijective.

La définition précédente peut se reformuler par le fait que toute transformation naturelle $S \to F$ peut être prolongée en une unique tranformation naturelle $A \to F$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \arrow[dl, dashed, "!"] \\ F & \end{tikzcd}$$

Une tranformation naturelle $S \to F$ est un choix d'une section de $F(A)$ pour chaque objet $A$ de $\mathcal{C}$. La naturalité d'une telle transformation donne le fait que les choix soient compatibles par restrictions. Si $\mathcal{C}$ possède des produits fibrés, nous retrouvons en particulier l'idée de compatibilité sur l'intersection de deux ouverts. Le fait de pouvoir étendre une telle transformation sur $A$ correspond à l'existence d'une section gobale cohérente avec les choix précédents. Moralement, les sections d'un faisceau peuvent être définies uniquement sur des recouvrements quite à conserver une certaine cohérence. nous appellerons par la suite *catégorie des faisceaux sur* $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les faisceaux. Nous noterons $\widetilde{\mathcal{C}}$ une telle catégorie ainsi que $\mathrm{Top}(X)$ la catégorie des faisceaux sur $X$où $X$ est un espace topologique. Enfin, nous noterons **Esp** la catégorie des espaces topologiques. [2]

## 1.4 Faisceau associé

Les catégories de préfaisceaux sont des catégories qui ont beaucoup de bonnes propriétés d'existence de divers constructions. Ces catégories sont complètes et cocomplètes et possèdent également des propriétés plus rares telles que l'existence d'exponentielles et d'un classifiant des sous-objets. Ces bonnes propriétés, qui sont transmises par la catégorie des ensembles, font des catégories de préfaisceaux des catégories dans lesquelles il est agréable de travailler. Les catégories de faisceaux héritent également de ces bonnes propriétés et une des raisons à cela est la notion de faisceau associé. Le but de cette sous-partie est de voir qu'il est possible de contruire un adjoint à doite au foncteur d'oubli $\widetilde{C} \to \widehat{C}$. L'intérêt d'une telle construction est qu'elle permet non seulement d'étendre certaines propriétés des catégories de préfaisceaux à celles de faisceaux mais également de construire des exemples génériques de morphismes de topos. [3]

**Proposition 1.4.1.** *Le foncteur d'oubli $\widetilde{C} \to \widehat{C}$ admet un adjoint à gauche noté $a : \widehat{C} \to \widetilde{C}$ qui préserve les limites finies. Si $P$ est un préfaisceau, l'image de $P$ par ce foncteur est le faisceau associé à $P$.*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est, étant donné un préfaisceau $P$, de définir un nouveau préfaisceau $P^+$ par la formule

$$P^+(A) = \varinjlim_{S \in J(A)} \operatorname{Hom}(S, P)$$

où la colimite est prise sur la catégorie des cribles ordonnés par inclusion inverse. Concrètement, l'idée est de considérer des ensembles cohérents de sections sur « les recouvrements les plus fins possibles ». Il est d'ailleurs possible de représenter cette colimite avec une relation d'équivalence puisque la catégorie sur laquelle nous considèrons cette colimite est cofiltrante d'après la remarque 1.2.2. Nous pouvons alors montrer que l'on obtient un faisceau en appliquant deux fois la construction précédente à un préfaisceau. Nous construisons ainsi un foncteur qui vérifie les propriétés de l'énoncé. □

**Proposition 1.4.2.** *Les catégories de faisceaux sont complètes et cocomplètes.*

*Démonstration.* Le fait que de telles catégories soient complètes est une conséquence directe de la définition. Il est possible de prolonger les tranformations naturelles d'un crible couvrant vers une limite de faisceaux en les prolongeants sur le cône associé à cette limite. En ce qui concerne la cocomplétude, cela découle du fait que le foncteur faisceau associé préserve les colimites. □

Une autre propriété importante des catégories de préfaisceaux est leurs fonctorialités : tout foncteur $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit un foncteur $\phi_* : \widehat{\mathcal{D}} \to \widehat{\mathcal{C}}$ en composant par $\phi$ à droite. L'intérêt de cette constuction est que le foncteur $\phi_*$ admet un adjoint à gauche $\phi^*$ qui préserve les limites finies. Le foncteur faisceau associé permet de généraliser ces constructions pour les catégories de faisceaux en composant respectivement à droite et à gauche les adjoints précédents par le foncteur d'oubli et le foncteur faisceau associé. [4]

2. La topologie de Grothendieck correspondante étant celle donnée par l'exemple 1.2.3. Il s'agit de la notion usuelle de faisceau.
3. Nous verrons de quoi il s'agit par la suite.
4. Il faut toutefois avoir des conditions spécifiques de continuités sur le foncteur $\phi$.

*Exemple* 1.4.3. Si $X$ et $Y$ sont deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue, nous obtenons le foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$ qui à un ouvert de $Y$ associe son image inverse par $f$. La construction précédente nous donne alors deux foncteurs $f_*$ et $f^*$ sur les catégories de faisceaux correspondantes qui sont adjoints l'un de l'autre.

# 2 Topos de Grothendieck

Nous venons de voir que, comme les catégories de préfaisceaux, les catégories de faisceaux ont de très bonnes propriétés et qu'il est agréable de travailler avec. Les catégories de faisceaux sont en réalité bien plus intéréssantes que celles de préfaisceaux puisque la notion de faisceau est liée à une intuition géométrique qui n'existe pas pour les catégories de préfaisceaux. Le but de cette partie est d'étudier les catégories de faisceaux en essayant de comprendre leurs liens intimes avec la notion d'espace.

## 2.1 Catégorie des topos

**Définition 2.1.1.** Un *topos de Grothendieck* ou plus simplement un *topos* est une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux.

*Remarque* 2.1.2. Plusieurs sites non nécessairement équivalents peuvent induire le même topos. Pour cette raison, les topos sont des catégories uniquement équivalentes à celles de faisceaux sur un site.

Comme nous l'avions indiqué précédemment, les topos sont des objets géométriques. Naïvement, l'intuition géométrique première des topos provient du fait que l'exemple naturel de topos est fourni par les espaces topologiques. Dans un premier temps notre but va donc être de comprendre quelles sont les informations topologiques préservées à l'intérieur des topos fournis par des espaces. Pour faire une telle chose, il est naturel de voir l'association espace - topos comme un foncteur et pour cela il faut définir une notion de morphisme de topos. Remarquons maintenant, d'après l'exemple 1.4.3, que toute application continue $f : X \to Y$ induit un foncteur $f_* : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$ qui admet un adjoint à gauche $f^*$ qui preserve les limites finies. Ce fait motive la définition suivante.

**Définition 2.1.3.** Soit $E$ et $E'$ deux topos. Un morphisme de topos $u$ de $E$ vers $E'$ est un couple de foncteur $(u_*, u^*)$ tel que $u^*$ est l'adjoint à gauche de $u_*$ et tel que $u^*$ préserve les limites finies.

*Remarque* 2.1.4. Il est possible de manière générale de construire des morphismes de topos en utilisant la fonctorialité des catégories de faisceaux.

L'étude des foncteurs adjoints nous montre que cette définition de morphisme fait sens. Il est possible de considèrer les morphismes de topos comme étant uniquement des foncteurs qui admettent un adjoint à gauche préservant les limites finies. Nous pouvons alors vérifier que ces propriétés sont préservées par composition. Pour des raisons similaires, la notion de transformation naturelle entre morphismes de topos fait également sens et peut se définir de la façon suivante.

**Définition 2.1.5.** Soit $E$ et $E'$ deux topos et $u : E \to E'$ et $v : E \to E'$ deux morphismes de topos. Une *transformation naturelle de $u$ vers $v$* est une tranformation naturelle de $u_*$ vers $v_*$.

Les topos ne forment alors non plus seulement une catégorie mais une 2-catégorie. Les détails à ce sujet sont dans [2]. De façon informelle, il s'agit d'une catégorie où les ensembles de fléches forment également des catégories pour lesquelles les flèches sont les transformations naturelles. Par la suite nous ferons comme si les topos sont uniquement des catégories, bien qu'il est important en réalité de les voir comme des 2-catégories. Nous noterons **Top** la catégorie des topos.

*Remarque* 2.1.6. Comme pour les catégories, la notion d'isomorphisme de topos n'est pas très intéressante puisqu'elle est trop restrictive. La bonne notion est celle d'équivalence de topos. [5] Les topos sont d'ailleurs des catégories uniquement équivalentes à des catégories de faisceaux.

*Remarque* 2.1.7. Généralement, un topos n'est pas une petite catégorie. Pour que nous puissions considérer les topos comme une catégorie, il faut donc uniquement considérer les topos sur un univers fixé. Ce problème se pose également pour les catégories de foncteurs telles que celles de morphismes de topos. Par la suite nous ignorerons ce problème.

Maintenant que les topos forment une catégorie, l'association espace - topos devient un foncteur et nous allons à présent étudier sa fidélité. Remarquons que si $X$ et $Y$ sont deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue, alors le morphisme $f_* : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Top}(Y)$ est une équivalence si $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$ en est une. Ceci signifie en particulier que le foncteur Top ne détecte pas le côté ensembliste des ouverts mais les voit uniquement comme un ensemble ordonné. Si $X$ est un espace topologique fixé, la relation d'ordre sur les ouverts de $X$ est donnée par la relation d'appartenance : « $U$ est inclus dans $V$ si tout élément $x$ de $U$ et aussi dans $V$ ». Remarquons cependant que l'appartenance d'un élément $x$ à un ouvert $U$ peut également se traduire en terme d'intersection de l'adhérence de $\{x\}$ avec $U$. Nous avons en fait l'équivalence suivante :

$$x \in U \iff \overline{\{x\}} \cap U \neq \emptyset.$$

Puisque les adhérences de singletons sont des fermés irréductibles, nous pouvons finalement reformuler la définition de l'inclusion par : « $U$ est inclus dans $V$ si pour tout fermé irréductible $Z$, si l'intersection de $Z$ avec $U$ est vide alors l'intersection de $Z$ avec $V$ l'est également ». L'intérêt de cette nouvelle formulation est que, contrairement aux points [6], chaque fermé irréductible joue un rôle différent dans la définition de l'ordre. Pour que cette bonne propriété des fermés irréductibles soit également vraie pour les points, il faut que les adhérences de deux points différents soient différentes. Ce fait motive la définition suivante.

**Définition 2.1.8.** Un espace topologique $X$ est *sobre* si tout fermé irréductible de $X$ admet exactement un point générique. Nous noterons $\mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}}$ la sous-catégorie pleine de **Esp** dont les objets sont les espaces sobres.

*Remarque* 2.1.9. Dans la pratique, les espaces topologiques sont sobres. Les espaces séparés le sont ainsi que ceux sous-jacents aux schémas.

L'intérêt de cette notion est que sur un espace sobre $X$, le passage à l'adhérence devient une bijection entre les points de $X$ et ses fermés irréductibles. De plus, il est possible de rendre les espaces sobres de façon universelle.

**Proposition 2.1.10.** *Le foncteur d'oubli* $\mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}} \to \mathbf{Esp}$ *admet un adjoint à gauche noté* Sob : $\mathbf{Esp} \to \mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}}$. *Si $X$ est un espace topologique, nous appellerons espace sobre associé à $X$ l'image de $X$ par ce foncteur.*

5. définie de la même manière que pour les catégories.
6. Deux points différents peuvent être toujours dans les mêmes ouverts.

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de construire $\mathrm{Sob}(X)$ comme étant l'espace des fermés irréductibles de $X$ où les ouverts de $\mathrm{Sob}(X)$ sont les ensembles de fermés irréductibles de $X$ qui ont une intersection non vide avec un ouvert fixé de $X$. Autrement dit, la relation d'appartenance dans $\mathrm{Sob}(X)$ correspond précisément à la définition de l'ordre sur les ouverts de $X$ à travers les fermés irréductibles. De ce fait, il est intuitif qu'un tel espace soit sobre et il possible de vérifier que le foncteur ainsi obtenu est bien l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli. □

L'unité de l'adjonction précédente est l'application qui à un point de $X$ associe son adhérence en tant que point de $\mathrm{Sob}(X)$. Par construction, cette application continue induit une équivalence entre la catégorie des ouverts de $X$ et celle de son espace sobre associé. On peut traduire ce fait par la proposition suivante.

**Proposition 2.1.11.** *Soit $X$ un espace topologique. L'unité de l'adjonction de la proposition 2.1.10 induit une équivalence de topos entre* $\mathrm{Top}(X)$ *et* $\mathrm{Top}(\mathrm{Sob}(X))$.

*Remarque* 2.1.12. Si $X$ est un espace sobre, l'unité de l'adjonction précédente est un homéomorphisme.

## 2.2 Point d'un topos

Nous venons de voir que le foncteur Top ne détecte pas la non-sobriété des espaces. Plus précisément, il s'agit de la seule information qui n'est pas préservée par ce foncteur. Pour comprendre ce fait, nous allons construire un foncteur qui permet de retrouver un espace sobre à partir d'un topos. Remarquons maintenant que, étant un point $x$ d'un espace $X$, l'inclusion $\{x\} \hookrightarrow X$ induit un morphisme de topos $x : \mathrm{Top}(\{x\}) \to \mathrm{Top}(X)$ où la catégorie $\mathrm{Top}(\{x\})$ est celle des ensembles et où le foncteur $x^*$ est le foncteur fibre associé à $x$.[7] C'est à travers ces idées que découle la définition suivante.

**Définition 2.2.1.** Soit $E$ un topos. Un *point de $E$* est un morphisme de topos $\xi : \mathbf{Ens} \to E$. Nous appellerons *foncteur fibre de $\xi$* le foncteur $\xi^*$. Si $F$ est un objet de $E$, nous noterons $F_\xi$ l'ensemble $\xi^*(F)$. Il s'agit de la *fibre de $F$ en $\xi$*. Nous noterons également $\mathrm{Esp}(E)$ l'ensemble des points de $E$ à isomorphisme près.

*Remarque* 2.2.2. Les points d'un topos sont souvent donnés par leurs foncteurs fibres.

Le fait de voir les points d'un topos comme des foncteurs fibres donne une interprétation particulière aux objets d'un topos. Si $F$ est un faisceau sur un site et $\xi$ un point du topos associé, l'ensemble $F_\xi$ permet de comprendre les sections de $F$ aux alentours de $\xi$. Moralement, l'étude de la fibre de différents faisceaux sur différents points permet de comprendre leurs dispositions spatiales les uns par rapport aux autres. Les faisceaux jouent alors en quelque sorte le rôle d'ouvert. Cette idée motive la définition suivante.

**Définition 2.2.3.** Soit $E$ un topos. Un *ouvert de $E$* est un sous-objet de l'objet final de $E$.

*Remarque* 2.2.4. Les ouverts d'un topos forment un ensemble ordonné qui admet des bornes supérieures sur des ensembles quelconques, des bornes inférieures sur des ensembles finies, un plus grand élément et un plus petit élément. On retrouve ici l'intuition d'une topologie qui est stable par réunion quelconque, intersection finie et qui contient le vide et l'espace total.

7. Il s'agit du foncteur qui à un faisceau associe sa fibre en $x$.

Dans le cas de figure où $E$ est une catégorie de faisceaux, l'objet final de $E$ est le faisceau dont les ensembles de sections sont toujours des singletons. Les ouverts de $E$ sont alors des faisceaux qui ont au plus une section sur chaque objet du site correspondant à $E$. Ce côté binaire correspond à l'intuition de celle d'un relation d'appartenance. De façon informelle, il donne un sens à la phrase : « $\xi$ appartient à $U$ si $U_\xi \neq \emptyset$ » où $U$ est un ouvert de $E$ et $\xi$ un point de $E$.

*Exemple* 2.2.5. Si $X$ est un espace topologique, les ouverts de $\mathrm{Top}(X)$ sont les ouverts de $X$. En effet, il est facile de vérifier que les sous-faisceaux du faisceau final sur $X$ sont ceux qui ont une unique section sur les ouverts inclus dans $U$ et aucune sur les autres où $U$ est un ouvert fixé.

On peut alors utiliser cette intuition pour définir une topologie sur les classes de points d'un topos.

**Définition 2.2.6.** Soit $E$ un topos. Nous appellerons *espace associé à* $E$ l'espace topologique $\mathrm{Esp}(E)$ pour lequel les ouverts sont donnés par

$$|U| = \{\xi \in \mathrm{Esp}(E) | U_\xi \neq \emptyset\}$$

où $U$ est un ouvert de $E$.

*Remarque* 2.2.7. La construction précédente définie un foncteur Esp : **Top** $\to$ **Esp**.

*Remarque* 2.2.8. En réalité, les points d'un topos forment plus qu'un espace topologique. L'existence de morphismes entre les points est une partie importante de leurs structures. Il s'agit d'une nouveauté apportée par les topos par rapport aux espaces topologiques. Nous considérons cependant ici uniquement des classes de points.

*Remarque* 2.2.9. Les ensembles de la forme $|U|$ où $U$ est un ouvert de $E$ forment bien une topologie. On peut en effet vérifier que l'application $U \mapsto |U|$ préserve les réunions et les intersections finies.

**Proposition 2.2.10.** *Soit $X$ un espace topologique. L'espace* $\mathrm{Esp}(\mathrm{Top}(X))$ *est homéomorphe à* $\mathrm{Sob}(X)$.

*Démonstration.* Pour des raisons similaires à celles de notre discussion sur l'odre des ouverts de $X$, les points de $\mathrm{Top}(X)$ correspondent canoniquement aux fermés irréductibles de $X$. Étant donné $Z$ un fermé irréductible de $X$, on construit un point de $\mathrm{Top}(X)$ en considérant le foncteur fibre associé à $Z$. Ce foncteur est défini par une colimite sur les ouverts ayant une intersection non vide avec $Z$.[8] Remarquons maintenant que l'application qui à un fermé irréductible $Z$ associe le point de $\mathrm{Top}(X)$ correspondant est bijective. L'injectivité provient du fait que l'on considère des fermés. Quand à la surjectivité, on peut étant un donné un point $\xi$ de $\mathrm{Top}(X)$ retrouver le fermé irréductible qui lui correspond en considérant le complèmentaire du plus grand ouverts $U$ de $X$ tel que $U_\xi$ soit vide. Finalement la bicontinuité découle directement des définitions des ouverts de $\mathrm{Sob}(X)$ et de $\mathrm{Esp}(\mathrm{Top}(X))$. ☐

Une conséquence de ce résultat est la proposition suivante.

**Proposition 2.2.11.** *Le foncteur* Esp : ***Top*** $\to$ ***Esp*** *est l'adjoint à doite du foncteur* Top : ***Esp*** $\to$ ***Top***.

**Corollaire 2.2.12.** Le foncteur Top est pleinement fidèle sur la sous-catégorie pleine des espaces sobres.

8. On retrouve en quelque sorte le foncteur fibre associé à $Z$ en tant que point de $\mathrm{Sob}(X)$.

## 2.3 Construction des nombres réels

Jusqu'à présent, nous nous sommes uniquement intéréssés aux topos founis par les espaces topologiques. Dans cette partie nous allons voir comment il est possible de construire les nombres réels en considérant les points d'un topos. Comme toute construction des nombres réels, la construction qui nous intéresse a pour but de résoudre un problème des nombres rationnels. Nous pouvons par exemple penser aux constructions des nombres réels par complétion ou par coupure qui ont respectivement pour but de résoudre les problèmes de non complétude et de non existence de borne supérieure de $\mathbb{Q}$. Le problème que allons tenter de résoudre ici est le fait que les intervalles fermés de $\mathbb{Q}$ ne sont pas compact. En effet, si nous considérons par exemple l'intervalle $I = [0, 2]$, il est possible de recouvrir $I$ en considérant deux suites d'intervalles ouverts dont les bornes de gauches et de droites respectivement tendent vers $\sqrt{2}$. Puisque $\sqrt{2}$ ne fait pas partie de $\mathbb{Q}$, il s'agit bien d'un recouvrement de $I$ qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Pour résoudre ce problème, nous allons considérer sur $\mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$ une topologie de Grothendieck pour laquelle les intervalles fermés de $\mathbb{Q}$ sembles compact.

**Définition 2.3.1.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{U}$ un recouvrement de $U$. Nous dirons que $\mathcal{U}$ est un *bon recouvrement de* $U$ si pour tout intervalle fermé $I$ inclus dans $U$, il existe $U_1$, ..., $U_n$ dans $\mathcal{U}$ tels que $I$ est inclus dans la réunion des $U_i$.

Les cribles engendrés par les bons recouvrements forment alors une topologie de Grothendieck sur $\mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$. Nous obtenons alors un site que nous allons noter $\mathcal{Q}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

**Proposition 2.3.2.** *Le foncteur* $\mathrm{Ouv}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$*, qui à un ouvert de* $\mathbb{R}$ *associe son intersection avec* $\mathbb{Q}$*, induit une équivalence entre les topos* $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *et* $\mathrm{Top}(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Les faisceaux sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{Q}$ sont déterminés par leurs sections sur les intervalles ouverts à bornes rationnelles. Le fait que le foncteur $\widetilde{\mathcal{Q}} \to \mathrm{Top}(\mathbb{R})$ soit une équivalence découle alors du fait que le foncteur $\mathrm{Ouv}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$ soit une bijection sur les intervalles ouverts à bornes rationnelles ainsi que du fait que les bons recouvrements d'intervalles ouvert dans $\mathbb{Q}$ soient exactement ceux qui proviennent de recouvrements des intervalles correspondants dans $\mathbb{R}$. $\square$

**Corollaire 2.3.3.** L'espace topologique $\mathrm{Esp}(\widetilde{\mathcal{Q}})$ est canoniquement homéomorphe à $\mathbb{R}$.

L'idée derrière cette construction est que les bons recouvrements d'ouverts de $\mathbb{Q}$ sont des recouvrements classiques là où la réciproque est fausse. Ceci entraine le fait qu'il y a plus de faisceaux dans $\mathcal{Q}$ que dans $\mathbb{Q}$. En particulier, là où les ouverts de $\mathrm{Top}(\mathbb{Q})$ sont ceux de $\mathbb{Q}$, les ouverts de $\widetilde{\mathcal{Q}}$ sont ceux de $\mathbb{R}$. Pour mieux comprendre ce résultat, construisons dès à présent à titre d'exemple l'ouvert de $\mathcal{Q}$ correspondant à $]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela considérons le faisceau $F$ sur $\mathcal{Q}$ dont l'ensemble des sections sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est défini par

$$F(]a, b[) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sqrt{2} \in ]a, b[ \\ \{*\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition « $\sqrt{2} \in ]a, b[$ » est écrite ici de façon informelle mais peut également se traduire dans le language des nombres rationnels par des conditions sur $a$ et $b$.[9] En reprenant la représentation des

9. Les conditions exactes étant : $b > 0$, $b^2 > 2$ et ($a < 0$ ou $a^2 < 2$).

ouverts en terme de faisceaux de l'exemple 2.2.5, il est clair que $F$ correspond à $]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$. Remarquons maintenant que même si $F$ est bien un faisceau sur $\mathcal{Q}$, ce n'est pas le cas sur $\mathbb{Q}$. En effet puisque $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$, il est possible de construire des intervalles ouverts de $\mathbb{Q}$ qui « ne contiennent pas $\sqrt{2}$ » [10] dont la réunion est égale à $\mathbb{Q}$. L'existence de tels recouvrements entraîne que $F$ n'est pas un faisceau sur $\mathbb{Q}$. Cependant un tel recouvrement n'est pas un bon recouvrement et ce problème n'existe pas sur $\mathcal{Q}$.

## Références


[1] Michael Artin, Alexandre Grothendieck et Jean-louis Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Springer et Verlag, 1977.

[2] Monique Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs*. Springer et Verlag, 1972.

[3] Saunders Mac lane et Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.

[4] Alessandro Maria Masullo. *Number Theory Learning Seminar Perfectoid spaces*. 2014 - 2015.


10. Dans le sens que nous avions expliqué précédemment.