Le nombre d'or

CAMBAKIDIS Alexandre

30 Juin 2017

Introdution

FIGURE – Euclide (300 avant J.-C)

Introdution

FIGURE – Euclide (300 avant J.-C)

« Une droite est dite être coupée en Extrême et Moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit. »

FIGURE – Léonardo Fibonacci (1175 - 1250) - *Liber Abaci*

FIGURE – Léonardo Fibonacci (1175 - 1250) - *Liber Abaci*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Propriétés générales

Propriétés générales

On considère le polynôme suivant :

$$x^2 - x - 1$$

Propriétés générales

On considère le polynôme suivant :

$$x^2 - x - 1$$

Admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$$

Soient $a, \ b$ deux réels positifs non nuls.

Soient $a, \ b$ deux réels positifs non nuls.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \text{ alors } \frac{a}{b} = \varphi.$$

Soient $a, \; b$ deux réels positifs non nuls.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \text{ alors } \frac{a}{b} = \varphi.$$

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \text{ alors } \frac{a}{b} = \varphi. \text{ Avec } b < a - b < 1.$$

Le nombre d'or φ est irrationnel.

Le nombre d'or φ est irrationnel.

$$\text{Soit } A = \left\{ b \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \varphi = \frac{a}{b} \right\}.$$

Le nombre d'or φ est irrationnel.

Soit $A = \left\{ b \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \varphi = \dfrac{a}{b} \right\}$.

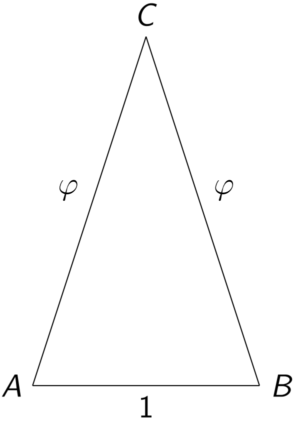
Soit b le plus petit élément de A. Donc $\varphi = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$.

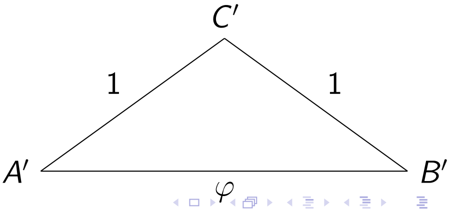
Or $b > a - b \geqslant 1$. Contradiction.

Triangles d'or et d'argent

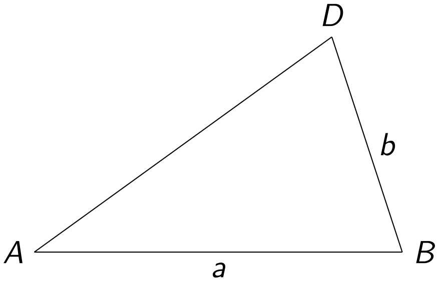
Triangles d'or et d'argent

Le triangle d'or possède deux angles de $\frac{2\pi}{5}$ et d'un angle $\frac{\pi}{5}$. Le triangle d'argent possède deux angles de $\frac{\pi}{5}$ et d'un angle de $\frac{3\pi}{5}$

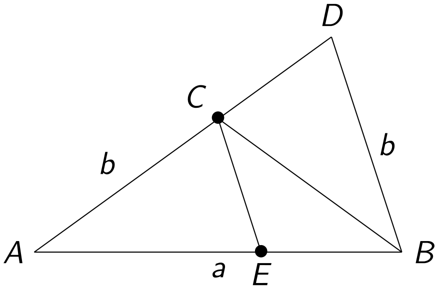




Il est possible de couper des triangles d'or et d'argent en deux autres triangles, l'un d'or et l'autre d'argent.



Il est possible de couper des triangles d'or et d'argent en deux autres triangles, l'un d'or et l'autre d'argent.



Construction du pentagone régulier

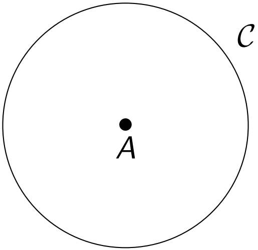
Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.

Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.

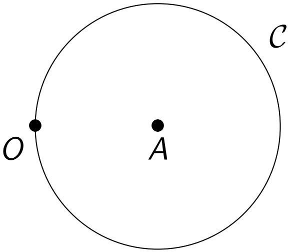
Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.



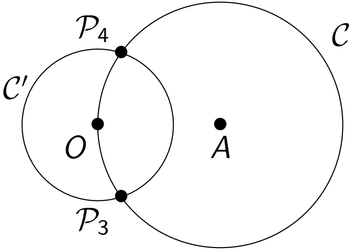
Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.



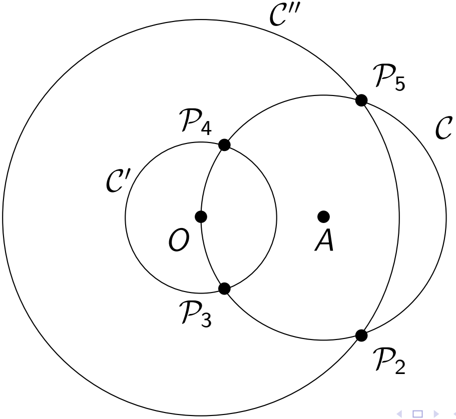
Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.



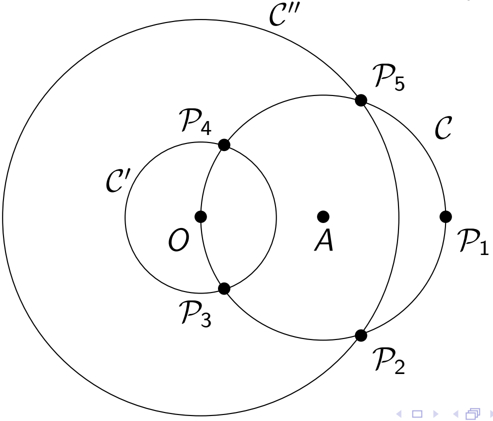
Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.



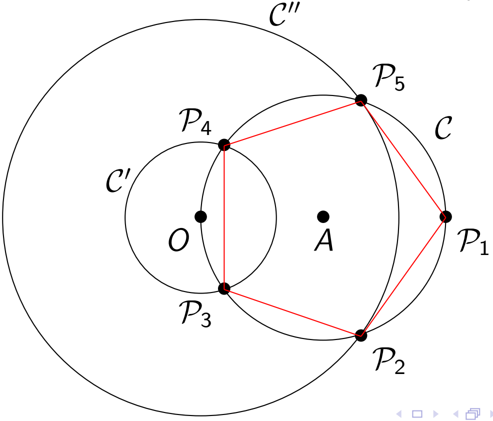
Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.



Construction du pentagone régulier

Le pentagone est construit à partir des proportions d'or.
Soit a et b deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$.

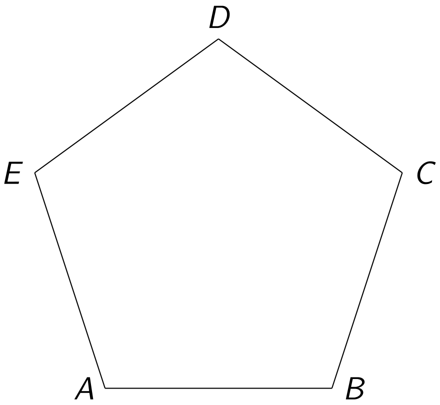


Pentagramme

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier.

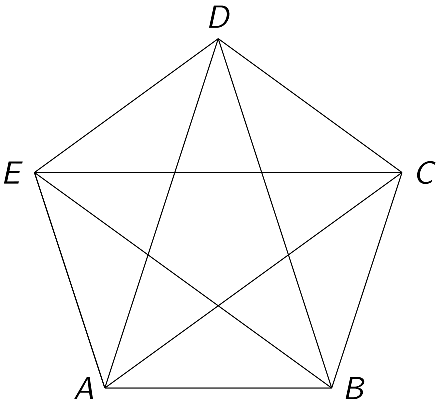
Pentagramme

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier.



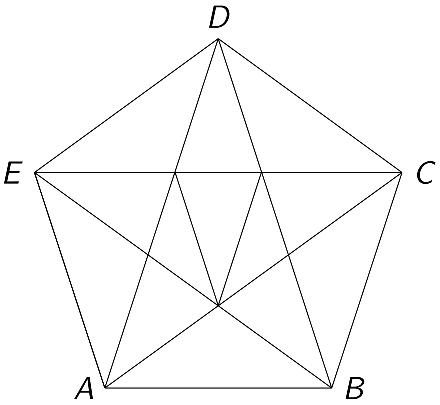
Pentagramme

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier.



Pentagramme

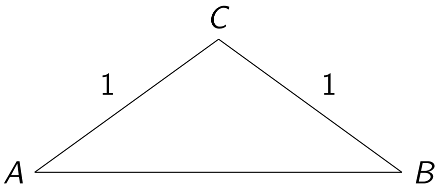
Soit $ABCDE$ un pentagone régulier.



Trigonométrie

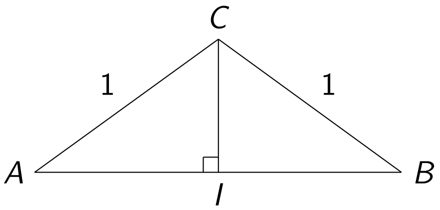
Trigonométrie

Considérons un triangle d'argent de base φ.



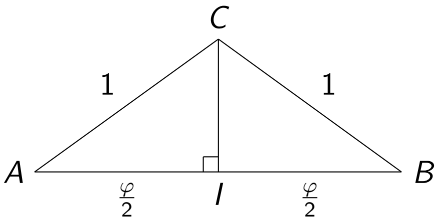
Trigonométrie

Considérons un triangle d'argent de base φ.



Trigonométrie

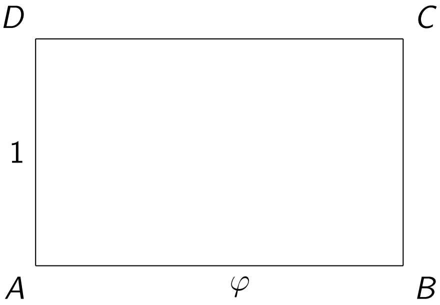
Considérons un triangle d'argent de base φ.



Rectangle d'or

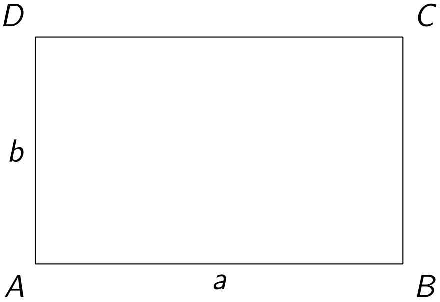
Rectangle d'or

$ABCD$ est un rectangle d'or.

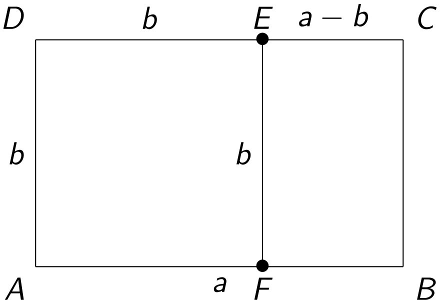


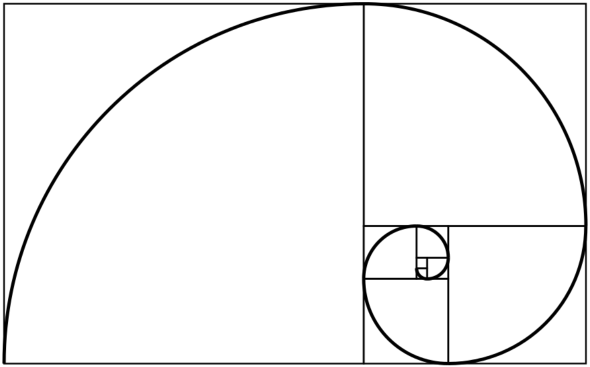
On peut découper un rectangle d'or en un autre rectangle d'or plus petit.

On peut découper un rectangle d'or en un autre rectangle d'or plus petit.



On peut découper un rectangle d'or en un autre rectangle d'or plus petit.





Spirale d'or obtenu par une succession de quarts de cercle dont le rayon est égal au côté de chacun des carrés suite au découpage d'un rectangle d'or.

L'arithmétique du nombre d'or

L'arithmétique du nombre d'or

Suite des Fibonacci définies par récurrence par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

L'arithmétique du nombre d'or

Suite des Fibonacci définies par récurrence par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Les suites (φ^n) et (ψ^n) sont des suites de Fibonacci.

L'arithmétique du nombre d'or

Suite des Fibonacci définies par récurrence par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Les suites (φ^n) et (ψ^n) sont des suites de Fibonacci.

Les suites de Fibonacci forment un espace vectoriel engendré par (φ^n) et (ψ^n).

Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
Alors $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \psi^n)$

Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
Alors $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \psi^n)$

$$\text{On a } \psi = -\frac{1}{\varphi} \text{ donc, } F_n \simeq \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Soit la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
Alors $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \psi^n)$

On a $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$ donc, $F_n \simeq \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Par récurrence on peut encore démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$