Le nombre d'or

Alexandre CAMBAKIDIS

30 Juin 2017

Table des matières

1 Introduction

Le nombre d'or est une des curiosités mathématiques les plus connues de par son aspect mystique, mais également car il apparait dans beaucoup de domaines mathématiques comme la géométrie et l'arithmétique.

Le nombre d'or fut remarqué dans l'antiquité par le mathématicien *Euclide*. Il y fait référence dans le livre VI des *Élements d'Euclide*. Le nombre d'or y est défini géométriquement comme un rapport de longueur par la formulation suivante : « *Une droite est dite être coupée en Extrême et Moyenne raison quand, comme elle est toute entière relativement au plus grand segment, ainsi est le plus grand relativement au plus petit.* ». Si on considère deux segments de longueurs a et b, alors on peut traduire cette définition par « *a est à b ce que $a + b$ est à a* » C'est à dire :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

On démontrera par la suite que ce rapport est unique.

Au Moyen-Âge, *Leonardo Pisano*, plus connu sous le nom de *Fibonacci*, publia son livre *Liber Abaci* dans lequel il traite divers problèmes mathématiques. En s'appuyant sur les travaux d'*Al-Khawarizmi* et d'*Abu Kamil*, deux mathématiciens arabes du VIIIè et IXè siècles, il y démontre notamment que le nombre d'or est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$, soit l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. Il introduisit également la célèbre suite de Fibonacci, très liée au nombre d'or. Cependant ce lien ne sera établi que plus tard. Cet ouvrage apporta une nouvelle vision du nombre d'or, mettant en évidence certaines de ses propriétés arithmétiques.

En 1498 *Fra Luca Pacioli*, un moine professeur de mathématiques, écrit « *De divina proportione* » (« La divine proportion ») illustré par *Léonard De Vinci*. Dans cet ouvrage, il considère que le nombre d'or a des propriétés esthétiques et montre qu'il se retrouve dans le domaine de l'architecture et de la peinture.

Au XIXè siècle, le philosophe et professeur allemand *Adolf Zeising* (1810-1876) renforça la dimension mystique du nombre d'or. En effet il étudia bon nombre d'œvres architecturales et picturales où apparaissent le nombre d'or, le plaçant en symbole d'harmonie confirmant ainsi la preuve d'esthétisme établie par *Pacioli*. Il fut également le premier à introduire le terme de « *section dorée* ». C'est à cette même époque que le scientifique *Wilhelm Friedrich Benedict Hofmeister* établit des liens entre le nombre d'or et la phyllotaxie (arrangement des feuilles sur une plante), confortant les idées de Zeising. L'appellation « nombre d'or » fût définitivement adoptée en 1932 suite à la publication du livre du même nom par le mathématicien roumain Matila Ghyka. Il s'inspire des travaux d'*Adolf Zeising* et se fonde sur le pentagone pour renforcer l'idée de beauté et d'harmonie de celui-ci (Nous verrons en quoi dans le développement de l'article).

2 Quelques propriétés préliminaires

Dans l'ensemble de l'article, on notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau (totalement) ordonné des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'anneau (totalement) ordonné des rationnels, $\mathbb{R}$ le corps (totalement) ordonné des réels et $\mathbb{C}$ le corps des complexes. Nous travaillerons uniquement en géométrie euclidienne.

Théorème 2.1 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)**.** *Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :*

$$a = b \times q + r, \text{ avec } 0 \leq r < |b|$$

On appelle l'entier q le quotient *de la division euclidienne de a par b et l'entier r le* reste *de la division euclidienne de a par b.*

Démonstration. — Démontrons l'existence d'un tel couple. Supposons tout d'abord que $b > 0$. On considère l'ensemble $A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid nb > a \}$. L'entier $(|a| + 1)b$ est un multiple de b qui est strictement plus grand que a. En effet :

$$(|a| + 1)b > |a|b \geqslant |a| \geqslant a$$

On a donc $A \neq \emptyset$. Montrons que A est minoré par $-|a|$: Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m < -|a|$ alors, comme $b \geqslant 1$:

$$mb < -|a|b \leqslant -|a| \leqslant a$$

et donc $m \notin A$. Soit n le plus petit élément de A. Posons $q = n - 1$, alors $qb \leqslant a < qb + b$. D'où $0 \leqslant a - qb < b$. Si $r = a - qb$ alors :

$$a = bq + r \qquad \text{et } \ 0 \leqslant r < b = |b|$$

Supposons maintenant que $b < 0$. D'après le premier cas, il existe q et r tels que $a = (-b)q + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$ En écrivant $a = b(-q) + r$. On remarque que le couple $(-q, r)$ convient.

— Montrons maintenant l'unicité de ce couple. Supposons qu'il existe un autre couple (q', r') tel que :

$$a = bq' + r' \text{ avec } 0 \leqslant r' < |b|$$

On a alors $bq + r = bq' + r'$. Alors $b(q - q') = r' - r$. Or $-|b| < r' - r < |b|$ et $-|b| < b(q - q') < |b|$. Il en résulte alors que $0 \leqslant |b| \mid q - q'| < |b|$. On simplifie et on obtient $0 \leqslant |q - q'| < 1$. Comme q et q' sont des entiers alors $q - q'$ l'est également. On a donc $|q - q'| = 0$. Cela implique que $q = q'$ et $r = r'$. $\square$

Définition 2.2 (Diviseur)**.** *Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que b divise a si il existe un entier relatif q tel que $a = bq$ i.e le reste de la division euclidienne de a par b est nul.*

Définition 2.3 (racine d'un polynôme)**.** *Soit α un nombre complexe. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficient complexe. On dit que α est une racine de P si $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$*

Théorème 2.4 (Discriminant d'un polynôme de degré deux)**.** *Soient a,b,c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré*

$$aX^2 + bX + c = 0 \tag{1}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On l'appellera par la suite le discriminant *du polynôme.*

Alors :

- *Si $\Delta > 0$ l'équation (1) a exactement deux solutions réelles :*

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$ l'équation (1) a exactement une solution réelle :*

$$X = \frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$ l'équation (1) n'a pas de racines réelles.*

Démonstration. On cherche les solutions de (1). On factorise par a :

$$a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right)$$

On force la factorisation :

$$a\left(\left(X + \frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{c}{a}$ par $4a$:

$$a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ on obtient :

$$a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

On sépare maintenant les cas.

- Si $\Delta > 0$, on remarque que l'équation est sous la forme $a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$.

  On factorise :

$$a\left(\left(X - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

  Comme $a \neq 0$, on a donc bien deux racines distinctes égales à $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

— Si $\Delta = 0$, alors :

$$a\left(X - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

Comme $a \neq 0$, on a donc bien une seule racine égale à $\frac{-b}{2a}$

— Si $\Delta < 0$, alors :

$$a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$$

Et donc ne s'annule pas. □

Proposition 2.5. *Soient a un complexe et $P(X)$ un polynôme à coefficient complexe. Alors a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P.*

Démonstration. — On suppose que a est une racine de P. On écrit la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$, $P(X) = (X - a)Q(X) + R(X)$ avec $deg(R(X)) < deg(X - a) = 1$. Or comme a est une racine de P alors $P(a) = 0Q(a) + R = 0$, donc $R = 0$ et $(X - a)$ divise bien P.

— On suppose maintenant que $X - a$ divise $P(X)$. On a donc $P(X) = (X - a)Q(X)$. Si on évalue $P(X)$ en a alors $P(a) = 0Q(a) = 0$ et donc a est donc bien une racine de $P(X)$. □

Théorème 2.6 (relation coefficient racine dans un polynôme de degré deux)**.** *Soit $P = X^2 + bX + c$ un polynôme de degré deux unitaire (i.e $a = 1$) avec b, c des réels. Soient α et β ces deux racines complexes. On a alors $-b = \alpha + \beta$ et $c = \alpha \times \beta$*

Démonstration. α et β sont les racines de P donc $X - \alpha$ et $X - \beta$ divise P. Or comme P est unitaire et de degré deux alors $P = (X - \alpha)(X - \beta)$. En développant on obtient $P = X^2 - X(\alpha + \beta) + \alpha\beta$. Or comme $P = X^2 + bX + c$, par identification on en déduit $-b = \alpha + \beta$ et $c = \alpha\beta$. □

On supposera dans la suite de cet article que tout les triangles considérés ont des sommets distincts.

Définition 2.7. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Ces deux triangles sont dit* semblables *si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.*

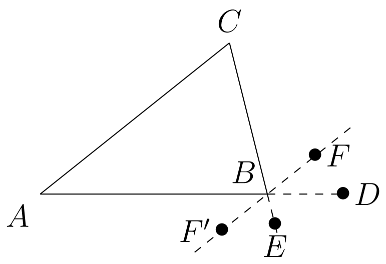
Proposition 2.8. *Deux triangles sont semblables si et seulement si ils ont deux angles et une longueur en commun.*

Démonstration. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et que $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. On suppose que $(AB) = (A'B')$. On effectue une ou plusieurs isométries(symétries, rotations, translations) pour obtenir $A = A'$. Comme les isométries conservent les angles et les longueurs on a que $B' \in AB$ et $C' \in AC$. Comme $(AB) = (A'B')$ alors $B = B'$. Or deux angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ sont respectivement égaux comme la sommes des angles d'un triangle est égale à π on obtient que $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et donc que ABC et $A'B'C'$ sont semblables. Le raisonnement est analogue si on suppose égales d'autres longueurs ou d'autres angles. □

Dans la proposition suivante, nous travaillerons sur des angles non-orientés.

Proposition 2.9. *La somme des angles d'un triangle est égale à π.*

Démonstration. Soit ABC un triangle quelconque. On prolonge les côtés (AB) et CB, soit D un point de (AB) différent de B tel que $AD > AB$ et E un point de (CB) différent de B tel que $CE > CB$. Soit F un point de la droite parallèle à AC passant par B mais différent de celui-ci tel que $\widehat{FBD}$ soit aigu. Soit F' un point de cette même droite différent de B tel que $\widehat{F'BD}$ soit obtus. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CBF}$ sont égaux comme alternes-internes. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{FBD}$ sont aussi égaux ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EBD}$. Donc, la somme des trois angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$ du triangle est égale à la somme des trois angles adjacents $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBF}$ et $\widehat{FBD}$ ainsi formés sur la ligne droite AD. Or la somme des trois angles formés est égale à l'angle plat, soit π, la somme des trois angles du triangle ABC est donc égale à π. On effectue un raisonnement analogue en remarquant que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{F'BE}$ sont égaux, ainsi que $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABF'}$.



□

Définition 2.10. *Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.*

3 Propriétés générales du nombre d'or

Lemme 3.1. *Le polynôme $x^2 - x - 1$ possède une unique racine positive.*

Démonstration. On calcul le discriminant de ce polynôme $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$. Le discriminant est positif donc $x^2 - x - 1$ possède exactement deux racines réelles α et β. Or par la relation coefficient racine, comme $\alpha \times \beta = -1$ alors ces deux racines sont de signe différents. Et donc $x^2 - x - 1$ possède une unique racine positive. □

Définition 3.2. *Le* nombre d'or *est l'unique racine positive φ de $x^2 - x - 1$.*

Proposition 3.3. *On a $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$*

Démonstration. On a vu que le discriminant de $x^2 - x - 1$ est égal à 5. On calcule les racines de ce polynôme.

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La fonction racine carrée étant par définition toujours positive, on en déduit donc que $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ car les deux racines sont de signes opposés. Il en résulte que $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique racine positive de ce polynôme. On a donc $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Proposition 3.4. *Soient a, b deux réels positifs non nuls. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$ alors $\dfrac{a}{b} = \varphi$.*

Démonstration. On suppose $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$. Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a} + 1$. En multipliant par $\dfrac{a}{b}$ on a $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 1 + \dfrac{a}{b}$. Ce qui ce réécrit $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{a}{b} - 1 = 0$. Donc $\dfrac{a}{b}$ est racine de $x^2 - x - 1$. Or comme a et b sont tout deux positifs, alors $\dfrac{a}{b}$ l'est également. Donc $\dfrac{a}{b}$ est l'unique racine positive de ce polynôme, soit φ. □

Proposition 3.5. *On a $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.*

Démonstration. Comme $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, alors $\varphi^2 = \varphi + 1$ et en divisant par φ, $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$. □

Proposition 3.6. *Soient a et b deux réels positifs distincts tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$. Alors $\dfrac{a}{b} = \varphi$ et $0 \leqslant a - b < b$*

Démonstration. On suppose $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$. Si on multiplie par $\dfrac{a-b}{b}$, alors $\dfrac{(a-b)a}{b^2} - 1 = 0$. On développe $\dfrac{a^2 - ab}{b^2} - 1 = 0$. Et donc $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - \dfrac{a}{b} - 1$. Comme a et b sont deux réels positifs alors $\dfrac{a}{b} > 0$ et donc $\dfrac{a}{b} = \varphi$. Or $\varphi > 1$ donc $0 \leqslant a - b < b$. □

Proposition 3.7. *φ est irrationnel.*

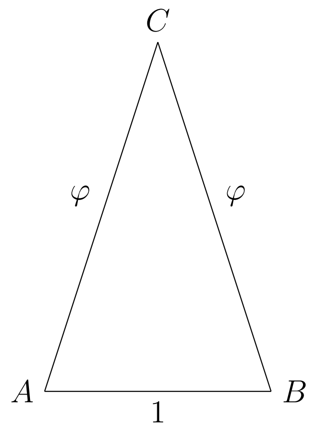
Démonstration. Soit $A = \left\{ b \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \varphi = \dfrac{a}{b} \right\}$. Si $A = \emptyset$ alors φ est irrationnel. Supposons que A soit non vide. Alors comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ il existe un plus petit élément. Notons b ce plus petit élément. On a donc $\varphi = \dfrac{a}{b}$. Or $\varphi = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$ et $0 \leqslant a - b < b$, c'est une contradiction. L'ensemble A est donc vide et φ est donc un nombre irrationnel. □

4 Géométrie du nombre d'or

Triangles d'or et d'argent

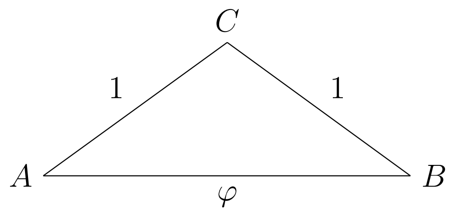
Définition 4.1. *Un* triangle d'or *(ou triangle sublime ou triangle d'or aigu) est un triangle isocèle dont le rapport des côtés à la base est égal à φ.*

Exemple de triangle d'or :



Définition 4.2. *Un* triangle d'argent *(gnomon d'or ou triangle d'or obtus) est un triangle isocèle dont le rapport des côtés à la base est égal à* $\frac{1}{\varphi}$.

Exemple de triangle d'argent :

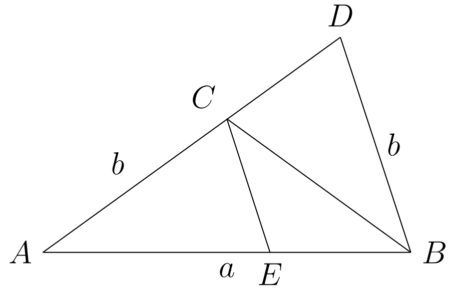


Une propriété cruciale des triangles d'or et d'argent est qu'il est possible de les couper en deux autre triangles, l'un d'or et l'autre d'argent.

Lemme 4.3. *Soit ABD un triangle d'or, il existe un point C sur un des côté de ABD tel que ABC est un triangle d'argent et BCD un triangle d'or. Soit ABC un triangle d'argent il existe un point E sur les côtés du triangle ABC tel que ACE soit un triangle d'or et BCE un triangle d'argent.*

Démonstration. Soient a et b avec $a > b$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Soit ABD un triangle d'or tels que A et B soient situés à une distance a l'un de l'autre et B et D à une distance b. Soit $C \in [AD]$ tel que $AC = b$ et soit $E \in [AB]$ tel que $AE = b$.

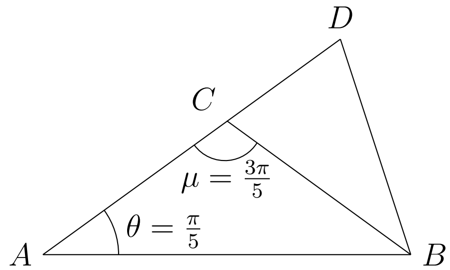
Les deux triangles ACE et ADB sont semblables (car tous deux isocèles de même sommet). Comme $BD = b$ on a $CE = a-b$ $\left(car\ \frac{b}{a-b} = \frac{a}{b}\right)$. Or $CD = a-b$ et ACE et ABD sont semblables, l'angle $\widehat{ACE}$ est égal à $\widehat{ADB}$. Enfin, comme $BD = AC$ les deux triangles ACE et BCD disposent de deux côtés et d'un angle égaux, ils sont donc semblables. Le triangle ACE étant semblable au triangle d'or ABD, c'est un triangle d'or ainsi que le triangle BCD en proportion $\frac{a}{b}$ avec le triangle initial. Le triangle BCD étant d'or, on a $BC = BD = b$. On a alors $\frac{CE}{BC} = \frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\varphi}$, BCE est donc bien un triangle d'argent.



□

Proposition 4.4. *Un triangle d'or possède deux angles de* $\frac{2\pi}{5}$ *et un de* $\frac{\pi}{5}$*, et un triangle d'argent de deux angles de* $\frac{\pi}{5}$ *et d'un angle de* $\frac{3\pi}{5}$*.*

Démonstration. Soit ABD un triangle d'or. Soit C un point de $[AD]$ tel que ACB soit un triangle d'argent et CDB un triangle d'or. Soit θ, μ et ν les angles respectivement formés par $\widehat{DAB}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCB}$. Le lemme précédent nous affirme que le triangle ABC est isocèle de sommet C. Donc l'angle $\widehat{DCB}$ est égal au double de l'angle $\widehat{CAB}$ soit $\nu = 2\theta$. D'autre part, le triangle $\widehat{BCD}$ étant aussi un triangle d'or, il est isocèle de sommet B. Ses angles sont θ, 2θ, 2θ. La somme des angles valant π, on a $5\theta = \pi$, soit $\theta = \frac{\pi}{5}$. Il vient alors que $\nu = 2\theta = \frac{2\pi}{5}$ puis que $\mu = \pi - \nu = \frac{3\pi}{5}$.



□

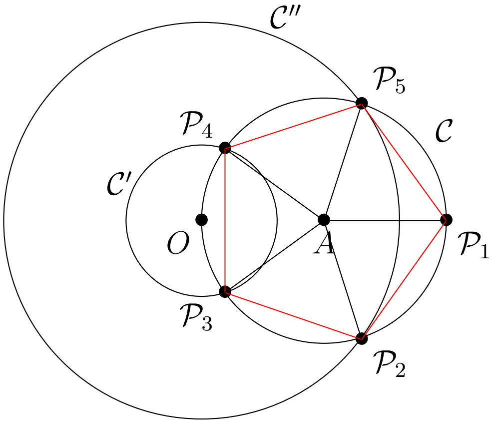
Pentagone régulier et pentagramme

Définition 4.5. *Un pentagone régulier est un polygone à cinq côtés de même longueur.*

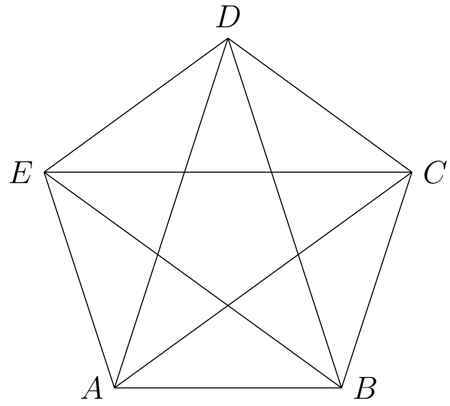
Le pentagone régulier est très lié au nombre d'or. En effet il est possible de construire un pentagone régulier à partir de proportion d'or. On verra par la suite que l'on peut faire apparaître un grand nombre de triangle d'or et d'argent à l'intérieur de celui-ci.

Méthode de construction : Soit a, b avec $a > b$ deux réels positifs tels que $\frac{a}{b} = \varphi$. Soit A un point du plan. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de rayon a. Soit O un point de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle de rayon b et de centre O. On note $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_3$ les intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $\mathcal{C}''$ un cercle de centre O et de rayon $a+b$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$ se croisent en deux points car $a+b < 2a$. On note alors $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_5$ les deux intersections de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$.

On note $\mathcal{P}_1$ l'intersection différente de O de (OA) et $\mathcal{C}$. Les points $\mathcal{P}_1$,$\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ forment un pentagone. Justifions maintenant que ce pentagone est régulier. Pour cela il suffit de montrer que si deux sommets sont consécutifs, alors leur angle avec le centre du cercle est de $\frac{2\pi}{5}$. On sait déjà de par notre construction que $\widehat{\mathcal{P}_4 A \mathcal{P}_3} = \frac{2\pi}{5}$. En effet ceci est une conséquence du fait que les points $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_3$ sont définis comme l'intersection du cercle de centre O de rayon b avec le cercle de centre A et de rayon a, on a donc $O\mathcal{P}_3 = O\mathcal{P}_4 = b$ et $OA = A\mathcal{P}_3 = A\mathcal{P}_4 = a$. Les triangles $\mathcal{P}_4 AO$ et $OA\mathcal{P}_3$ sont donc d'or, les angles $\widehat{\mathcal{P}_4 AO}$ et $\widehat{OA\mathcal{P}_3}$ font donc chacun $\frac{\pi}{5}$, ce qui permet de conclure. Intéressons-nous maintenant au triangle $\mathcal{P}_4 A\mathcal{P}_5$. Par construction, la distance entre O et $\mathcal{P}_5$ est égale à $a+b$, celle entre O et A ainsi que celle entre A et $\mathcal{P}_3$ est égal à a. On en déduit que le triangle $OA\mathcal{P}_2$ est un triangle d'argent. L'angle $\widehat{OA\mathcal{P}_5}$ fait donc $\frac{3\pi}{5}$. Comme l'angle $\widehat{\mathcal{P}_4 AO}$ fait $\frac{\pi}{5}$ et comme $\widehat{OA\mathcal{P}_5} = \widehat{OA\mathcal{P}_4} + \widehat{\mathcal{P}_4 A\mathcal{P}_5}$ alors on en déduit que $\widehat{\mathcal{P}_4 A\mathcal{P}_5} = \frac{2\pi}{5}$. Pour le triangle $\mathcal{P}_5 A\mathcal{P}_1$ il suffit de remarquer que $\widehat{OA\mathcal{P}_4} + \widehat{\mathcal{P}_4 A\mathcal{P}_5} + \widehat{\mathcal{P}_5 A\mathcal{P}_1} = \pi$, soit $\mathcal{P}_5 A\mathcal{P}_1 = \pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$. On effectue un raisonnement analogue pour les deux autres angles et on obtient que les diagonales du pentagone inscrit dans $\mathcal{C}$ forment des angles identiques, ce qui implique que $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_4\mathcal{P}_5 = \mathcal{P}_5\mathcal{P}_1$. Le pentagone ainsi tracé est donc bien un pentagone régulier.



Si on trace toutes les diagonales du pentagone régulier on obtient un pentagramme :

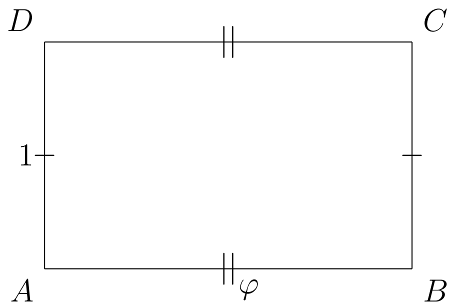


On remarquera que l'on peut trouver de nombreux triangles d'or et d'argent à l'intérieur de celui-ci.

Rectangle et spirale d'or

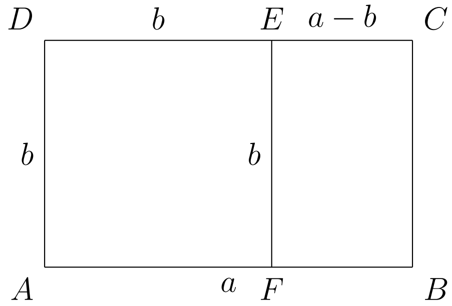
Définition 4.6. *Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport du plus grand côté au plus petit est égal à φ.*

Exemple de rectangle d'or :

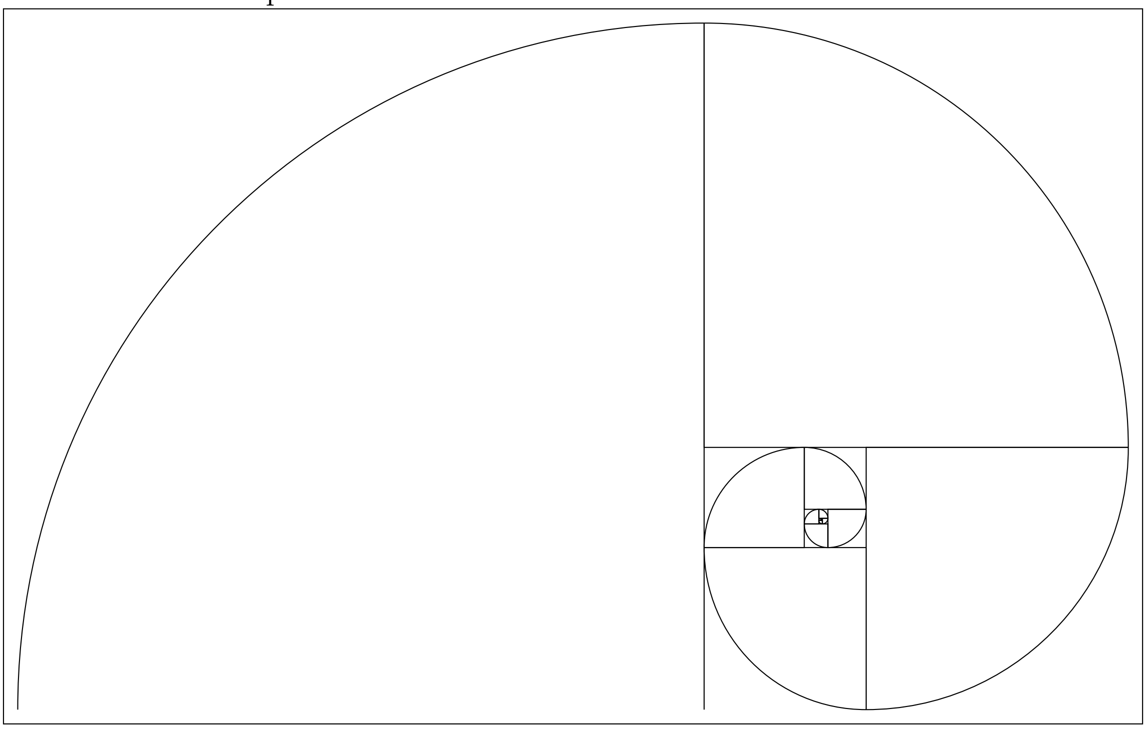


Lemme 4.7. *Soit $ABCD$ un rectangle d'or. Il existe E et F, deux points du rectangle tel que $ADEF$ soit un carré et $BCEF$ soit un rectangle d'or.*

Démonstration. Soit $ABCD$ un rectangle d'or de longueur a et de largeur b. Soit E le point de $[DC]$ tel que $DE = b$. Soit F le point de $[AB]$ tel que $AF = b$. Alors $AFED$ est un carré de côté b et $FBDE$ est un rectangle de longueur b et de largeur $a - b$. Or $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \varphi$ car $ABCD$ est un rectangle d'or. Donc $FBDE$ est également un rectangle d'or. □



Si l'on découpe un rectangle d'or à l'infini, on appelle spirale d'or la succession de quarts de cercle dont le rayon est égal au côté de chacun des carrés, avec pour centre leur sommet respectif.



spirale réalisée par Andrew Mertz sur http ://www.texample.net

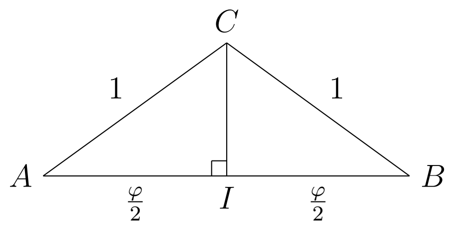
Remarque. — *On retrouve également cette même spirale lorsque l'on découpe à l'infini un triangle d'or.*

— *Il s'agit en réalité d'un cas particulier de spirale logarithmique, d'équation polaire* $r(\theta) = \rho\varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}$ *thème que nous n'aborderons pas ici.*

Trigonométrie

Proposition 4.8. *On a* $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}$

Démonstration. Soit ABC un triangle d'argent dont la base est égale à φ. On trace sa hauteur principale. On note I l'intersection entre cette hauteur et la base AB. Comme ABC est un triangle d'argent alors l'angle $\widehat{IAC}$ est égal à $\frac{\pi}{5}$, comme CIA est rectangle en I et que la somme des trois angles du triangle AIC est égale à π, on a $\widehat{ICA} = \pi - \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{10} = \frac{\frac{3\pi}{5}}{2}$. Comme ABC est isocèle, alors I est au milieu du segment $[AB]$. On a donc $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{AI}{AC} = \frac{\frac{\varphi}{2}}{1} = \frac{\varphi}{2}$.



□

5 L'arithmétique du nombre d'or

Définition 5.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Une* fraction continue*(infinie) est une suite non vide (a_n) dont le premier terme a_0 est un entier relatif et tous les termes suivant sont des entiers strictement positifs. La* réduite *d'indice p, avec $p \leqslant n$, d'une fraction continue est le rationnel $[a_0, a_1, ..., a_p]$ défini par $[a_0] = a_0$, $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$, ... $[a_0, a_1, ..., a_p] = a_0 + \frac{1}{[a_1, ..., a_p]}$.*

Proposition 5.2. *On a $\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}}$*

Démonstration. Soit (a_n) la fraction continue définie par récurrence par $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ avec $a_0 = 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, celle-ci est bien définie car elle laisse l'ensemble des réels invariant. On considère la propriété $\mathscr{H}_n$: $|a_n - \varphi| \leqslant \frac{|1-\varphi|}{\varphi^n}$. Au rang 0, on a $|a^0 - \varphi| = |1 - \varphi| = \frac{|1-\varphi|}{\varphi^0}$. Soit $p \leqslant n$, on suppose $\mathscr{H}_p$ vraie. Montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est également vraie. $|a_{n+1} - \varphi| = \left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right| = \frac{|\varphi - a_n|}{a_n\varphi}$. Or $\frac{|\varphi - a_n|}{a_n\varphi} \leqslant \left|\frac{1-\varphi}{\varphi^n}\right| \times 1 \times \frac{1}{\varphi} = \frac{|1-\varphi|}{\varphi^{n+1}}$. La condition $\mathscr{H}_{n+1}$ est donc vraie. Donc par récurrence, $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel n. Comme $\varphi > 1$, $\frac{|1-\varphi|}{\varphi^n}$ converge vers 0. Alors par l'inégalité précédente, $|a_n - \varphi|$ converge vers 0 et donc a_n converge vers φ. □

Remarque. — *Le fait que cette fraction soit infinie montre également que φ est un nombre irrationnel. En effet comme il s'agit d'une succession de divisions euclidiennes et que la fraction est infinie, cela signifie que φ ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p un entier relatif et q un entier non nul.*

— *On peut démontrer avec un raisonnement tout à fait analogue que* $\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

Définition 5.3. *Un suite de Fibonacci est une suite définie par récurrence par* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Remarque. *Cette suite est souvent utilisée en posant* $F_0 = F_1 = 1$, *ou* $F_0 = 0$ *et* $F_1 = 1$.

On a vu que le polynôme x^2-x-1 possédait deux racines, une positive $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et une négative que l'on notera par la suite ψ avec $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Proposition 5.4. *On a* $\psi = -\dfrac{1}{\varphi} = 1 - \varphi$.

Démonstration. Par la relation coefficients/racines on a $\varphi\psi = -1$ et $\varphi + \psi = 1$. On a donc $\psi = -\dfrac{1}{\varphi} = 1 - \varphi$. □

Lemme 5.5. *Les suites* (φ^n) *et* (ψ^n) *sont des suites de Fibonacci.*

Démonstration.
- Si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on considère l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_n : \varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$. Vérifions que celle-ci est vraie pour $n = 2$. On a $\varphi^2 = \varphi + 1 = \varphi^1 + \varphi^0$, $\mathscr{H}_n$ est donc vrai au rang 2. On suppose que pour tout entier naturel p inférieur ou égal à n, $\mathscr{H}_p$ est vraie. Montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie également. $\varphi^{n+1} = \varphi^n\varphi$, Par hypothèse de récurrence on a $(\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2})\varphi = \varphi^n + \varphi^{n-1}$. La condition $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie, donc par récurrence $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel.
- Comme $\psi^2 = \psi + 1$ car ψ est également une racine de $x^2 = x + 1$, alors le raisonnement est analogue au précédent et $(\psi)^n)$ est également une suite de Fibonacci. □

Dans la proposition suivante on considèrera comme connu que les suites forment un espace vectoriel noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 5.6. *Les suites de Fibonacci forment un espace vectoriel engendré par* $(\varphi)^n$ *et* $(\psi)^n$.

Démonstration. On pose $F = \{(u_{n\in\mathbb{N}}), u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ (F correspond à l'ensemble des suites de Fibonacci). Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- A-on $0 \in F$? La suite de Fibonacci (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 0$ est une suite nulle, donc $0 \in F$.
- Soit $(u_n), (v_n) \in F$, montrons que $(w_n) = (u_n + v_n) \in F$. On a $w_{n+2} = u_{n+2} + v_{n+2}$. Par définition de (u_n) et (v_n) on a $w_{n+2} = (u_{n+1} + v_{n+1}) + (u_n + v_n) = w_{n+1} + w_n$. Donc $(w_n) \in F$.
- Soit $n \geqslant 2$, $u_n \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u_n \in F$. Par définition $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ donc $\lambda u_n = \lambda(u_{n-1} + u_{n-2}) = \lambda u_{n-1} + \lambda u_{n-2}$. Donc $\lambda(u_n) \in F$.

L'ensemble F est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comme (φ^n) et (ψ^n) sont deux suites de Fibonacci, alors elles appartiennent à F. Soit $(u_n) \in F$. Montrons maintenant qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = a\varphi^n + b\psi^n$. Supposons qu'il existe un tel couple, alors

$$\begin{cases} u_0 = a + b \\ u_1 = a\varphi - \dfrac{b}{\varphi} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varphi}u_0 + u_1 = \left(\dfrac{1}{\varphi} + \varphi\right) a \\ \varphi u_0 - u_1 = \left(\varphi + \dfrac{1}{\varphi}\right) b \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a = \dfrac{u_0}{\varphi + 2} + \dfrac{u_1}{2} \\ b = \dfrac{\varphi(u_0\varphi - u_1)}{\varphi + 2} \end{cases}$$

Si a *et* b existent alors ils sont de cette forme, et comme u_0, u_1 *et* φ sont des constantes alors a *et* b sont uniques. Montrons l'existence d'un tel couple. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_n : u_n = a\varphi^n + b\psi^n$. On sait que pour $n = 0$ *et* $n = 1$ $\mathscr{H}_n$ est vraie. On suppose que pour tout entier p inférieur à n, $\mathscr{H}_p$ est vraie. Montrons qu'alors $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie. $(u_n) \in F$ donc, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, par hypothèse de récurrence on a, $u_{n+1} = a\varphi^n + b\psi^n + a\varphi^n + b\varphi^{n-1} = a(\varphi^n + \varphi^{n-1} + b)(\psi^n + \psi^{n-1})$. Or par le lemme précédent on obtient $u_{n+1} = a\varphi^{n+1} + b\psi^{n+1}$, donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie et donc par récurrence $\mathscr{H}_n$ est vraie pour tout entier naturel. □

Proposition 5.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit F_n une suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Alors $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.*

Démonstration. Soit F_n une suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Comme $(\varphi)^n$ et $(\psi)^n$ engendre l'espace vectoriel des suites de la forme $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et que la suite de Fibonacci est de cette forme, alors on peut écrire tous les termes de cette suite comme combinaison linéaire de $(\varphi)^n$ et $(\psi)^n$. C'est à dire, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha(\varphi)^n + \beta(\psi)^n$. Or comme $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on obtient que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

On trouve alors que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. On obtient donc, en factorisant $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$. □

Remarque. *Comme* $\psi = -\dfrac{1}{\varphi}$*, on peut réécrire cette égalité comme suit* $F_n = \dfrac{\varphi^n - \left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$.
On obtient donc $F_n \simeq \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

Proposition 5.8. *Soit* $F_n,\ n \in \mathbb{N}$ *une suite de Fibonacci. On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$

Démonstration. On pose $R_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite de Fibonacci on a $R_n = \dfrac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \dfrac{1}{R_{n-1}} \geqslant 1$. On rappelle que $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
|R_n - \varphi| &= \left|\left(1 + \frac{1}{R_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{\varphi}\right| \\
&= \left|\frac{\varphi - R_{n-1}}{R_{n-1}\varphi}\right|
\end{aligned}$$

Or on a $\left|\dfrac{\varphi - R_{n-1}}{R_{n-1}\varphi}\right| \leq \dfrac{1}{\varphi}|R_{n-1} - \varphi| \leq \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^{n-1} |R_1 - \varphi|$. Or $\varphi > 1$ donc $\dfrac{1}{\varphi} < 1$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)^n = 0$. Par la successions d'inégalités précédentes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |R_n - \varphi| = 0$. Et donc, par définition de R_n, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. □