

Séminaire de Master 2

David Kolar

Sous la direction de Bernard Le Stum

Introduction aux ∞ -catégories stables

Sommaire

Sommaire	i
Remerciements	ii
Introduction	ii
1 ∞ -Catégories	1
Ensembles simpliciaux	1
Nerfs, frontières et cornes	1
Fibrations	2
∞ -Catégories	3
Catégorie d'homotopie	4
2 Constructions ∞ -catégoriques	4
3 Stabilité	5
∞ -Catégories stables	5
Foncteurs exacts	6
Exemple : l' ∞ -catégorie dérivée d'une catégorie abélienne	6
4 Triangulation d'une ∞ -catégorie	7
Foncteur de suspension	7
Triangulation	8
A Catégories triangulées	iii
Définition	iii
Exemple : la catégorie des espaces vectoriels	iii
Exemple : la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne	iv
Non fonctorialité	iv
Bibliographie	v

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de séminaire : Monsieur Bernard Le Stum, qui a accepté de m'encadrer sur ce sujet qu'il m'a confié, pour ses retours et ses conseils, ainsi que ses remarques encourageantes tout au long de l'écriture de ce mémoire.

Avant de me jeter dans le monde des ∞ -catégories, c'est grâce à Monsieur Vincent Beck, maître de conférence à l'Université de Tours, que j'ai pu entamer mon parcours dans le monde catégorique, pour cela je le remercie chaleureusement.

Un immense merci enfin à ma famille, qui m'a écouté parler de catégories depuis quelques temps maintenant, sans exprimer trop de lassitude, voire même en exprimant la naissance d'un intérêt ! Dans cette famille, je remercie tout particulièrement ma soeur, Mélanie, qui a relu et corrigé l'orthographe de ce mémoire, sans perdre son temps à essayer de le comprendre.

Introduction

Dès l'introduction du langage des catégories en 1945 par Saunders MacLane et Samuel Eilenberg, ces derniers ont remarqué que les catégories elles-mêmes s'organisaient en une « 2-catégorie » **Cat**, cette remarque, et la généralisation aux n -catégories qu'elle allait engendrer, se révéla fondamentale dans le développement de la théorie de l'homotopie, mais aussi dans de nombreux autres domaines mathématiques (équations différentielles, géométrie différentielle, théorie des types...), et même en physique !

Cependant, alors que les catégories sont définies par des axiomes assez simples, les catégories supérieures deviennent rapidement très complexes à définir, ainsi le saut direct aux ∞ -catégories a permis d'englober toutes les définitions précédentes et de les unifier en une théorie cohérente. Les modèles proposés pour cette théorie ont été nombreux (espaces de Segal complets, catégories topologiques, enrichissement en ensembles simpliciaux...), et des travaux sont encore en cours pour déterminer leurs relations, notamment par Emily Riehl et Dominic Verity. Nous utiliserons dans ce mémoire le modèle décrit en 1973 par John M. Boardman et Rainer Vogt dans [1] basé sur les ensembles simpliciaux, et dont le développement doit beaucoup à André Joyal et Jacob Lurie.

Dans une première partie, nous introduirons les notions nécessaires sur les ensembles simpliciaux, pour arriver à la définition des ∞ -catégories. Nous étudierons ensuite l'extension dans ce cadre de certaines constructions essentielles des catégories. Après un petit interlude de topologie, nous attaquerons le sujet central de ce mémoire : la stabilité, qui permet de corriger un défaut de fonctorialité dans la théorie des catégories triangulées, nous montrerons en effet que la catégorie d'homotopie d'une ∞ -catégorie stable est canoniquement et fonctoriellement triangulée.

Dans le but de faciliter l'exposition de ce sujet, les questions, parfois fondamentales, émanant de la théorie des ensembles, seront laissées en suspend, l'écrasante majorité d'entre elles pouvant être résolue en fixant un cardinal régulier κ et en se restreignant à des « objets » κ -petits.

1 ∞ -Catégories

Ensembles simpliciaux

On note Δ la catégorie des ensembles ordonnés finis $[n] = \{0 < \dots < n\}$ et des applications croissantes.

Définition 1.1 (Ensemble simplicial, simplexe)

Un ensemble simplicial X est un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. On note X_n l'image de $[n]$ par X .
Un n -simplexe de X est un élément de X_n , on dit aussi qu'il est en degré n .

Notation

On note \mathbf{sSet} la catégorie des ensembles simpliciaux.
On note Δ^n le n -simplexe standard, représenté par l'ensemble $[n]$.

Deux classes particulières de morphismes d'ensembles finis sont

- Les morphismes de faces : $\delta^{n,0}, \dots, \delta^{n,n} : [n] \rightarrow [n-1]$, les surjections croissantes qui « évitent » la i^{e} valeur ;
- Les morphismes de dégénérescences : $\sigma^{n,0}, \dots, \sigma^{n,n} : [n-1] \rightarrow [n]$, les injections croissantes qui « dédoublent » la i^{e} valeur ;

Leurs images dans un ensemble simplicial sont notées $d_{n,i}$ et $s_{n,i}$, ou, lorsque l'indice n est évident, d_i et s_i . Ces morphismes d'ensembles simpliciaux vérifient les relations

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i & \text{si } i < j \\ s_i \circ s_j &= s_j \circ s_{i-1} & \text{si } i > j \end{aligned}$$

et

$$d_i \circ s_j = \begin{cases} s_{j-1} \circ d_i & \text{si } i < j \\ \text{id} & \text{si } i \in \{j, j+1\} \\ s_j \circ d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$

Un simplexe est dit *dégénéré* lorsqu'il est dans l'image d'un des d_i .

Définition 1.2 (Ensemble simplicial discret) [2]

Un ensemble simplicial est dit *discret* lorsque ses seuls simplexes non-dégénérés sont en degré 0.

Nerfs, frontières et cornes

Définition 1.3 (Nerf) [3]

Le foncteur de *nerf* sur la catégorie \mathbf{Cat} est défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{N} : \mathbf{Cat} &\rightarrow \mathbf{sSet} \\ \mathcal{C} &\mapsto \mathbf{N}(\mathcal{C}) = ([n] \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], \mathcal{C})) \end{aligned}$$

Pour un ensemble totalement ordonné fini E , on note $\Delta^E = \mathbf{N}(E)$.

Définition 1.4 (Frontière) [4]

La *frontière* d'un simplexe standard Δ^n est l'ensemble simplicial

$$\partial \Delta^n = \bigcup_{E \subsetneq [n]} \Delta^E$$

Définition 1.5 (Corne) [4]

Pour tout entier naturel n et tout entier $0 \leq k \leq n$, on définit la k^e corne d'un simplexe standard Δ^n par

$$\Lambda_k^n = \bigcup_{\substack{E \subset [n] \\ k \in E}} \Delta^E \subset \Delta^n$$

Pour $k = 0, n$, on l'appelle *corne extérieure*, et *corne intérieure* dans tout autre cas.

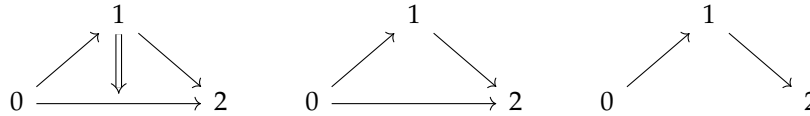


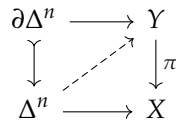
FIGURE 1 – De gauche à droite : le 2-simplexe Δ^2 , sa frontière $\partial\Delta^2$ et sa corne intérieure Λ_1^2 .

Dans un ensemble simplicial X , les frontières et les cornes sont les images des morphismes $\partial\Delta^n \rightarrow X$ et $\Lambda_n^k \rightarrow X$.

Fibrations

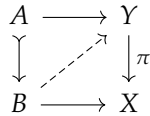
Définition 1.6 (Fibration triviale) [2]

Un morphisme $\pi : Y \rightarrow X$ d'ensembles simpliciaux est une *fibration triviale* lorsqu'il satisfait, pour tout $n \geq 1$, la propriété de relèvement



Remarque

Une condition équivalente est que π vérifie la propriété de relèvement pour tout monomorphisme d'ensemble simpliciaux



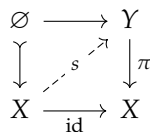
On dit alors que π est faiblement orthogonal à droite à tout monomorphisme.

Proposition 1.7 [2]

Soit $\pi : Y \rightarrow X$ une fibration triviale. Alors π admet une section s .

DÉMONSTRATION :

La section désirée est construite comme relèvement du monomorphisme $\emptyset \rightarrow X$ dans le diagramme



□

Définition 1.8 (Complexe de Kan)

Un *complexe de Kan* est un ensemble simplicial X tel que toute corne peut être étendue en un simplexe.

∞ -Catégories

Définition 1.9 (∞ -Catégorie) [3]

Une ∞ -catégorie est un ensemble simplicial X vérifiant, pour toute corne intérieure, la propriété de relèvement

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Définition 1.10 (∞ -Foncteur)

Un ∞ -foncteur F entre deux ∞ -catégories est un morphisme d'ensembles simpliciaux. On note $\text{Fun}_0(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ l'ensemble des foncteurs.

Remarque [2]

Pour deux ensembles simpliciaux S et T , la construction

$$[n] \in \Delta^{\text{op}} \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\Delta^n \times S, T)$$

détermine un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, donc un ensemble simplicial, que l'on note $\text{Fun}(S, T)$. De plus, lorsque T est une ∞ -catégorie, $\text{Fun}(S, T)$ en est également une.

Cette notation est compatible avec la notation de l'ensemble des foncteurs, en effet si S et T sont des ∞ -catégories, alors l'ensemble des 0-simplexes de $\text{Fun}(S, T)$ est $\text{Fun}_0(S, T)$.

Définition 1.11 (Ensemble de morphismes)

Soient X et Y deux objets d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} . L'ensemble simplicial $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est défini comme le produit fibré, dans la catégorie des ensembles simpliciaux, du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}) \\ \downarrow & & \downarrow (1,0) \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(X,Y)} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \end{array}$$

C'est alors un complexe de Kan, et pour $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)_0$, on a $d_0 f = X$ et $d_1 f = Y$.

Exemples

- Pour une catégorie \mathcal{C} , le nerf $N(\mathcal{C})$ est une ∞ -catégorie ;
- La catégorie Kan des complexes de Kan est une ∞ -catégorie ;
- L' ∞ -groupeoïde fondamental $\Pi_{\infty}(X)$ d'un espace topologique X (les k -simplexes étant les chemins de dimension k dans X) est une ∞ -catégorie, c'est même un complexe de Kan.

Remarque (Terminologie)

Boardman et Vogt désignent ce modèle d' ∞ -catégories sous le nom de *complexes de Kan faibles*, tandis que Joyal les désigne sous le nom de *quasi-catégories*, et que Lurie utilise simplement le terme d' ∞ -catégories.

Catégorie d'homotopie

Définition 1.12 (Catégorie d'homotopie) [5]

La *catégorie d'homotopie* d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} , notée $\mathrm{h}\mathcal{C}$, est l'image de \mathcal{C} par l'adjoint à gauche du foncteur de nerf N .

Remarque

On peut également décrire la catégorie $\mathrm{h}\mathcal{C}$ comme ayant les mêmes objets que \mathcal{C} , et comme ensembles de morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{h}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Où π_0 est l'ensemble des composantes connexes d'un ensemble simplicial.

Définition 1.13 (Isomorphisme)

Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est un *isomorphisme* lorsqu'il devient un isomorphisme usuel dans la catégorie d'homotopie $\mathrm{h}\mathcal{C}$.

2 Constructions ∞ -catégoriques

Formellement un diagramme commutatif dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, on étend naturellement cette notion aux ∞ -catégorie : un diagramme commutatif dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est un morphisme d'ensembles simpliciaux $K \rightarrow \mathcal{C}$. Pour un ensemble simplicial K , une ∞ -catégorie \mathcal{D} , et un objet $X \in \mathcal{D}$, on note \underline{X} le foncteur constant envoyant tout 0-simplexe de K sur X .

Définition 2.1 (Limite) [2]

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un ∞ -foncteur. On dit qu'un objet $Y \in \mathcal{D}$ est une *limite de F* s'il existe une transformation naturelle $\alpha : \underline{Y} \rightarrow F$ telle que, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, la composition avec α induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(\underline{X}, F)$$

dans la catégorie d'homotopie hKan . Dans ce cas, l'objet Y est déterminé à isomorphisme près, et noté $\lim F$.

Définition 2.2 (Colimite) [2]

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un ∞ -foncteur. On dit qu'un objet $Y \in \mathcal{D}$ est une *colimite de F* s'il existe une transformation naturelle $\alpha : F \rightarrow \underline{Y}$ telle que, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, la composition avec α induit un isomorphisme de complexes de Kan

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})}(F, \underline{X})$$

dans la catégorie d'homotopie hKan . Dans ce cas, l'objet Y est déterminé à isomorphisme près, et noté $\mathrm{colim} F$.

Les constructions catégoriques classiques s'étendent naturellement aux ∞ -catégories :

Définition 2.3

Un objet X d'une ∞ -catégorie \mathcal{C} est

initial s'il est la colimite du diagramme vide $\emptyset \rightarrow \mathcal{C}$;

terminal s'il est la limite du diagramme vide $\emptyset \rightarrow \mathcal{C}$;

zéro lorsqu'il est à la fois initial et final.

Une ∞ -catégorie est dite *pointée* lorsqu'elle admet un objet zéro.

Définition 2.4 (Produit, co-produit)

Un (*co*-)produit dans une ∞ -catégorie \mathcal{C} est une (*co*)limite d'un diagramme discret.

Définition 2.5 (Produit fibré, somme amalgamée)

Un *produit fibré* dans une ∞ -catégorie est une limite d'un diagramme de la forme $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$.

Définition 2.6 (Somme amalgamée)

Une *somme amalgamée* dans une ∞ -catégorie est une colimite d'un diagramme de la forme $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$.

Définition 2.7 (Triangle) [6]

Un *triangle* dans une ∞ -catégorie pointée \mathcal{C} est un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

On écrit souvent plus simplement $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ pour ce triangle.

Définition 2.8 (Suite fibrée, suite co-fibrée) [6]

Un triangle

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

est une *suite fibrée* lorsque c' est un produit fibré, et une *suite co-fibrée* lorsque c' est une somme amalgamée.

Lorsque c' est une suite fibrée, f est une *fibre* de g . Lorsque c' est une suite co-fibrée, g est une *co-fibre* de f . Par abus de langage, on appellera X la fibre de g et Z la co-fibre de f , notées respectivement $\text{fib}(g)$ et $\text{cofib}(f)$.

3 Stabilité

∞ -Catégories stables

Définition 3.1 (∞ -Catégorie stable) [6]

Une ∞ -catégorie pointée est dite *stable* lorsque

- tout morphisme admet une fibre et une co-fibre;
- un triangle est une suite fibrée si et seulement si c' est une suite co-fibrée.

Remarque

Cette définition ressemble beaucoup à la définition d'une catégorie abélienne. Et comme pour une catégorie abélienne, la stabilité est une propriété de la catégorie, et non une structure additionnelle.

Théorème 3.2 [6]

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable et K un ensemble simplicial. Alors l' ∞ -catégorie $\text{Fun}(K, \mathcal{C})$ est stable.

DÉMONSTRATION : C' est direct car les fibres et co-fibres se calculent point par point. □

Remarque

On peut noter une fois de plus le parallèle avec les catégories abéliennes, en effet, pour une catégorie abélienne \mathcal{A} et une petite catégorie \mathcal{C} , la catégorie $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est abélienne.

Foncteurs exacts

Les ∞ -catégories considérées ci-dessous sont supposées stables.

Définition 3.3 (Foncteur exact) [6]

Un ∞ -foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est dit *exact* s'il préserve les objets zéros, les suites fibrées et les suites co-fibrées.

Proposition 3.4 [6]

Soient $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ une collection d' ∞ -catégories stables. Alors le produit

$$\mathcal{C} = \prod_i \mathcal{C}_i$$

est stable et pour toute ∞ -catégorie stable \mathcal{D} , un foncteur $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est exact si et seulement si tous les foncteurs composés

$$\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{C}_i$$

sont exacts.

DÉMONSTRATION : C'est direct car les limites et colimites de \mathcal{C} sont calculées composante par composante. □

Remarque

Pour un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre ∞ -catégories stables, il y a équivalence entre

- (i) F est exact;
- (ii) F est exact à gauche (i.e. il préserve les limites);
- (iii) F est exact à droite (i.e. il préserve les colimites);

La preuve fait appel à des lemmes non énoncés ici, on renvoie donc à [6, Proposition 1.1.4.1] pour plus de détails.

Exemple : l' ∞ -catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Définition 3.5 (Catégorie simpliciale) [7]

Pour un ensemble ordonné $[n]$, la *catégorie simpliciale* S^n est définie par

- Les objets sont les éléments de $[n]$;
- Pour $i, j \in [n]$,

$$\text{Hom}(i, j) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i > j \\ N(P_{i,j}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $P_{i,j}$ l'ensemble ordonné $\{I \subseteq [n] \mid i \in I, j \in I, \forall k \in I, i \leq k \leq j\}$.

- Pour $i_0 \leq \dots \leq i_n$, la composition

$$\text{Hom}(i_0, i_1) \times \dots \times \text{Hom}(i_{n-1}, i_n) \rightarrow \text{Hom}(i_0, i_n)$$

est induite par l'application

$$\begin{array}{ccc} P_{i_0, i_1} \times \dots \times P_{i_{n-1}, i_n} & \rightarrow & P_{i_0, i_n} \\ I_1, \dots, I_n & \mapsto & I_1 \cup \dots \cup I_n \end{array}$$

Remarque

Cette construction décrit un foncteur $S : \Delta \rightarrow \mathbf{sSetCat}$ entre la catégorie des ensembles ordonnés finis et la catégorie des catégories enrichies en ensembles simpliciaux.

Définition 3.6 (Nerf cohérent)

Le *nerf cohérent* d'une catégorie simpliciale \mathcal{C} est défini par

$$N_c(\mathcal{C})_\bullet = \text{Hom}(S^\bullet, \mathcal{C})$$

Définition 3.7 (∞ -catégorie dérivée)

Pour une catégorie abélienne \mathcal{A} admettant assez de projectifs, on note $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ le nerf cohérent de la catégorie simpliciale $\text{Ch}^-(\mathcal{A}_0)$ des complexes de chaînes bornés, avec $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine des projectifs.

Cette ∞ -catégorie dérivée est stable (voir [8, Proposition 13.10]), et sa catégorie d'homotopie peut être identifiée avec la catégorie dérivée classique de \mathcal{A} .

Remarque

Le nerf cohérent fournit également une équivalence (au sens de Quillen) entre la catégorie des catégories simpliciales et la catégorie des ensembles simpliciaux.

4 Triangulation d'une ∞ -catégorie

Foncteur de suspension

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie. On considère la sous-catégorie \mathcal{M}_Σ de $\text{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ engendrée par les carrés

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

qui sont des sommes amalgamées.

Si \mathcal{C} admet toutes les co-fibres, alors le foncteur $\mathcal{M}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ d'évaluation en le premier sommet induit une fibration triviale.

Définition 4.1 (Foncteur de suspension) [6]

Soit $s : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}_\Sigma$ une section de cette fibration, et $e : \mathcal{M}_\Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur qui à une somme amalgamée associe son dernier sommet. Alors $e \circ s$ est un endo-foncteur de \mathcal{C} , que l'on note $\Sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. C'est le *foncteur de suspension* de \mathcal{C} .

Dualement, on définit \mathcal{M}_Ω comme la sous-catégorie de $\text{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathcal{C})$ engendrée par les carrés

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

qui sont des produits fibrés.

Si \mathcal{C} admet toutes les fibres, alors le foncteur d'évaluation en le dernier sommet $\mathcal{M}_\Omega \rightarrow \mathcal{C}$ induit une fibration triviale.

Définition 4.2 (Foncteur de lacets) [6]

Soit s' une section de cette fibration, et $e' : \mathcal{M}_\Omega \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'évaluation en le premier sommet. Alors $e' \circ s'$ est également un endo-foncteur de \mathcal{C} , noté $\Omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. C'est le *foncteur de lacets* de \mathcal{C} .

Théorème 4.3 [6]

Si \mathcal{C} est stable, alors les foncteurs Σ et Ω sont pleinement fidèles et essentiellement surjectifs, et sont quasi-inverses mutuels.

DÉMONSTRATION :

Si \mathcal{C} est stable, alors les catégories \mathcal{M}_Σ et \mathcal{M}_Ω coïncident. Soit $X \in \mathcal{C}$. Par propriété universelle de la somme amalgamée, X détermine un unique¹ carré

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Par propriété universelle du produit fibré, Y détermine également cet unique¹ carré. Ainsi

$$\Omega \circ \Sigma(X) = (e' \circ s' \circ e \circ s)(X) = (e' \circ s' \circ e) \left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \xrightarrow{Y} & Y \end{array} \right) = (e' \circ s')(Y) = e' \left(\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \xrightarrow{Y} & Y \end{array} \right) = X$$

De même, $\Sigma \circ \Omega(X) = X$. □

Notation

Pour un objet X d'une ∞ -catégorie stable \mathcal{C} , on note, pour tout entier n ,

$$X[n] = \begin{cases} \Sigma^n X & \text{si } n \geq 0 \\ \Omega^{-n} X & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Triangulation

Lemme 4.4 [7]

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable. Alors \mathcal{C} admet les co-produits finis.

DÉMONSTRATION :

Comme \mathcal{C} admet un objet initial, il suffit de considérer les co-produits de deux objets. Soient X et Y deux objets de \mathcal{C} , et soit $\text{cofib} : \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur de co-noyau. On a les isomorphismes

$$X \simeq \text{cofib}(X[-1] \xrightarrow{u} 0)$$

$$Y \simeq \text{cofib}(0 \xrightarrow{v} Y)$$

Alors, comme u et v ont un co-produit dans $\text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$, et comme cofib préserve les co-produits, X et Y admettent un co-produit (construit comme $\text{cofib}(X[-1] \rightarrow Y)$). □

Théorème 4.5 (Triangulation d'une ∞ -catégorie) [6]

Soit \mathcal{C} une ∞ -catégorie stable. Alors la catégorie d'homotopie $\text{h}\mathcal{C}$ est additive et triangulée².

DÉMONSTRATION :

Soient X et Y deux objets de $\text{h}\mathcal{C}$. Alors $\text{Hom}_{\text{h}\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \pi_1 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma X, Y) = \pi_2 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma^2 X, Y)$. Comme Σ est une équivalence, pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $Z = \Sigma^2 X$. Donc $\text{Hom}_{\text{h}\mathcal{C}}(X, Y)$ est muni d'une structure de groupe abélien, le lemme précédent affirme que \mathcal{C} admet tous les co-produits finis, donc $\text{h}\mathcal{C}$ aussi. Donc $\text{h}\mathcal{C}$ est additive.

1. à isomorphisme près.

2. On renvoie à l'annexe A pour la définition des catégories triangulées

Comme les notations introduites le suggèrent, on définit le foncteur de translation par $X \mapsto X[1]$.

Un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ de hC est distingué s'il existe dans \mathcal{C} un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\bar{h}} & W \end{array}$$

où \bar{f} et \bar{g} sont des représentants respectifs des classes d'homotopies de f et g , tel que les deux carrés soient des sommes amalgamées et que h soit la composée de (la classe d'homotopie de) \bar{h} et de l'isomorphisme $X[1] \simeq W$ déterminé par le rectangle extérieur. Montrons que ces données définissent une triangulation sur hC :

(TR1) Pour un morphisme $f : X \rightarrow Y$ de \mathcal{C} , on considère la sous-catégorie $\mathcal{E} \subset \text{Fun}(\Delta^1 \times \Delta^2, \mathcal{C})$ engendrée par les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

vérifiant les propriétés ci-dessus. On vérifie aisément que la restriction à la première flèche induit une fibration triviale $e : \mathcal{E} \rightarrow \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$, donc que f détermine entièrement un tel diagramme. Ainsi tout morphisme de hC appartient à un triangle distingué. De plus si $f = \text{id}_X$, alors Z est un objet zéro, ce qui conclut.

(TR2) Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ un triangle distingué de hC , correspondant à un diagramme de \mathcal{E} comme décrit plus haut. On étend ce diagramme en

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \\ & & \downarrow & & \downarrow u \\ & & 0'' & \longrightarrow & V \end{array}$$

Où le carré ajouté est une somme amalgamée. Alors on obtient un morphisme entre les carrés

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0' & \longrightarrow & W \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0'' & \longrightarrow & V \end{array}$$

qui induit un diagramme commutatif dans hC

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & X[1] \\ u \downarrow & & \downarrow f[1] \\ V & \longrightarrow & Y[1] \end{array}$$

Les lignes horizontales sont des isomorphismes. Ce qui montre que $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ est distingué.

Réciproquement, soit $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ un triangle distingué de hC , comme le foncteur de translation est un équivalence sur \mathcal{C} , le triangle $Y[-2] \xrightarrow{g[-2]} Z[-2] \xrightarrow{h[-2]} X[-1] \xrightarrow{-f[-1]} Y[-1]$ est distingué, par application de la première partie (cinq fois), le triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ est distingué.

(TR3) Soient deux triangles de \mathbf{hC}

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1]$$

On considère sans perte de généralité que ces deux triangles sont induits par des diagrammes σ, σ' de \mathcal{E} . Tout carré commutatif de \mathbf{hC}

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

peut être relevé (non uniquement) en un carré de \mathcal{C} , que l'on identifie à un morphisme $\phi : e(\sigma) \rightarrow e(\sigma')$ dans la catégorie $\text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$. Comme e est une fibration triviale, ϕ se relève en un morphisme $\sigma \rightarrow \sigma'$, qui détermine une transformation naturelle de triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

(TR4) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ des morphismes de \mathcal{C} . Comme $e : \mathcal{E} \rightarrow \text{Fun}(\Delta^1, \mathcal{C})$ est une fibration triviale, tout triangle distingué commençant par f, g ou $g \circ f$ est déterminé à isomorphisme³ près. Ainsi il suffit de montrer qu'il existe un triplet de triangles qui vérifient l'axiome. Pour cela on construit dans \mathcal{C} un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y/X & \longrightarrow & Z/X & \longrightarrow & X' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & Z/Y & \longrightarrow & Y' \longrightarrow (Y/X)' \end{array} \quad (1)$$

Dans lequel tous les carrés sont des sommes amalgamées. En regardant les bons rectangles, on obtient les isomorphismes

$$X' \simeq X[1] \quad Y' \simeq Y[1] \quad (Y/X)' \simeq Y/X[1]$$

et quatre triangles distingués

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{f} Y \rightarrow Y/X \rightarrow X[1] \\ Y &\xrightarrow{g} Z \rightarrow Z/Y \rightarrow Y[1] \\ X &\xrightarrow{g \circ f} Z \rightarrow Z/X \rightarrow X[1] \\ Y/X &\rightarrow Z/X \rightarrow Z/Y \rightarrow Y/X[1] \end{aligned}$$

Les relations octaédriques dans \mathbf{hC} sont assurées par la commutativité du diagramme (1) dans \mathcal{C} .

□

3. non unique

A Catégories triangulées

Définition

Définition A.1 (Catégorie triangulée) [9]

Une catégorie additive \mathcal{A} est *triangulée* lorsqu'elle admet un foncteur additif (dit de *translation*) $X \mapsto X[1]$ et une collection de triangles (dit *distingués*) $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ vérifiant les axiomes suivants

(TR1) Les triangles $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ sont distingués et tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ s'étend en un triangle distingué $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$.

(TR2) Le triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{f[1]} Y[1]$ l'est.

(TR3) Dans le diagramme à lignes distinguées suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow f[1] \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

il existe un morphisme $Z \rightarrow Z'$ le faisant commuter.

(TR4) Étant donné les triangles distingués

$$\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{u} Y/X \xrightarrow{d} X[1] \\ Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{v} Z/Y \xrightarrow{d'} Y[1] \\ X \xrightarrow{g \circ f} Z \xrightarrow{w} Z/X \xrightarrow{d''} X[1] \end{array}$$

il existe un triangle distingué

$$Y/X \xrightarrow{\phi} Z/X \xrightarrow{\psi} Z/Y \xrightarrow{\theta} Y/X[1]$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \xrightarrow{v} & Z/Y & \xrightarrow{\theta} & Y/X[1] \\ & \searrow f & \nearrow g & \searrow w & \nearrow \psi & \searrow d' & \nearrow u[1] \\ & & Y & & Z/X & & Y[1] \\ & & \searrow u & \nearrow \phi & \searrow d'' & \nearrow f[1] & \\ & & & Y/X & \xrightarrow{d} & X[1] & \end{array}$$

Appelé relations octaédriques.

Exemple : la catégorie des espaces vectoriels

Théorème A.2

La catégorie \mathbf{Vect}_k des espaces vectoriels sur un corps k est triangulée.

DÉMONSTRATION :

Le foncteur de translation est l'identité, les triangles distingués sont les suites exactes $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$. \square

Exemple : la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Définition A.3 (Catégorie dérivée)

Pour une catégorie abélienne \mathcal{A} , on définit la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} comme la catégorie des complexes de co-chaînes de \mathcal{A} localisée aux quasi-isomorphismes.

Définition A.4 (Cône)

Soient $A^\bullet : \dots \xrightarrow{d_A} A^n \xrightarrow{d_A} A^{n+1} \xrightarrow{d_A} \dots$ et $B^\bullet : \dots \xrightarrow{d_B} B^n \xrightarrow{d_B} B^{n+1} \xrightarrow{d_B} \dots$ deux objets de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne. Soit $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ un morphisme de complexes.

Le cône de f , noté $\text{cone}(f)$ est le complexe défini par

$$\text{cone}(f) = \dots \xrightarrow{d_f} A^n \oplus B^{n-1} \xrightarrow{d_f} A^{n+1} \oplus B^n \xrightarrow{d_f} \dots$$

Avec la différentielle

$$d_f^i = \begin{pmatrix} -d_A^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_B^i \end{pmatrix}$$

Remarque

Le cône d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est naturellement accompagné d'une injection et d'une projection

$$Y \rightarrow \text{cone}(f)$$

$$\text{cone}(f) \rightarrow X[1]$$

Théorème A.5

La catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est triangulée.

DÉMONSTRATION :

Le foncteur de translation décale les indices d'un complexe d'un degré, les triangles distingués sont les triangles isomorphes à un triangle de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{cone}(f) \rightarrow X[1]$$

□

Non functorialité

Soit R un anneau unitaire. Dans la catégorie dérivée $D(\mathbf{Mod}_R)$, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R[1] & \xrightarrow{\text{id}} & R[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R[1] & \xrightarrow{\text{id}} & R[1] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors les morphismes $R[1] \xrightarrow{\text{id}} R[1]$ et $R[1] \xrightarrow{0} R[1]$ le font commuter.

Donc la structure définie par les triangles distingués n'est pas functorielle. C'est de ce constat qu'est venue la nécessité de remplacer les catégories triangulées par de « meilleurs » objets : les ∞ -catégories stables, dont on a vu que les catégories d'homotopies étaient canoniquement triangulées.

Bibliographie

- [1] J.M. BOARDMAN et R. VOGT : Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces. Springer, 1973.
- [2] Jacob LURIE : Kerodon. <https://kerodon.net>.
- [3] Emily RIEHL et Dominic VERITY : Elements of ∞ -Category Theory. Cambridge University Press, 2022.
- [4] Denis-Charles CISINSKI : Higher Categories and Homotopical Algebra. Cambridge University Press, 2019.
- [5] NLAB AUTHORS : homotopy category of an $(\infty, 1)$ -category. ncatlab.org.
- [6] Jacob LURIE : Higher Algebra. Harvard University Press, 2017.
- [7] Jacob LURIE : Higher Topos Theory. Princeton University Press, 2009.
- [8] Jacob LURIE : Stable ∞ -categories, 2009.
- [9] Jean-Louis VERDIER : Des catégories dérivées des catégories abéliennes. Société mathématique de France, 1996.