Modules de type fini sur l'algèbre de Weyl

Abel Frappat et Lucas Laumonnier
TER encadré par Bernard Le Stum

Mai 2019

Table des matières

Résumé

Nous présentons dans un premier temps les algèbres de Weyl en $n \geq 1$ variables : leur intérêt, leur propriétés algébriques, une étude de leur modules de longueur finie. Nous introduisons ensuite les définitions de *filtration* et d'*algèbre graduée* qui nous permettent d'enrichir cette étude et de l'étendre dans le cas des modules de type fini. Le *polynôme de Hilbert*, le *théorème de Bernstein* et, pour finir, la notion d'*holonomie*, utilisent ces résultats et permettent de donner des caractérisations de ces modules sur l'algèbre de Weyl, très utilisées par exemple dans le cadre des résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

1 Algèbre de Weyl

1.1 Définition

Soit K un corps commutatif de caractéristique 0 (généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). *L'algèbre de Weyl* sur K, notée $A_1(K) = A_1$ est l'algèbre des opérateurs différentiels avec coefficients polynomiaux, autrement dit des éléments de la forme :

$$f_m(x)\partial^m + f_{m-1}(x)\partial^{m-1} + ... + f_0(x), m \in \mathbb{N}$$

avec

$$f_i \in K[x] \ , \ \partial = \frac{\partial}{\partial x}$$

ou encore

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \ \ a_{\alpha,\beta} \in K.$$

On définit plus généralement la n-ème algèbre de Weyl sur K, notée $A_n(K) = A_n$ $(n \geq 1)$, de la même façon. C'est l'algèbre des opérateurs différentiels avec coefficients polynomiaux à n variables, et alors :

$$f_i \in K[x_1, ..., x_n].$$

$$\text{Avec } \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } \beta = (\beta_1, ..., \beta_1) \in \mathbb{N}^n$$

$$x = (x_1, ..., x_n), \partial = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}) = (\partial_1, ..., \partial_n)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}.$$

Cette algèbre est engendrée par x_i et ∂_i, $i = 1, ..., n$. Par la suite, on pourra travailler avec $n = 1$, pour simplifier l'écriture et le passage au cas général se fait naturellement.
L'algèbre de Weyl est un exemple d'anneau simple non commutatif qui n'est pas un anneau de matrices sur un corps.On peut définir $A_1(K)$ comme étant la K-algèbre engendrée par x et ∂, avec la relation $[\partial, x] = 1$. Cela est motivé par la dérivation des fonctions :

$$\frac{\partial}{\partial x}(xf) = x\frac{\partial}{\partial x}(f) + f$$

i.e.

$$\partial(xf) - x\partial(f) = (\partial x)f - (x\partial)f = f$$

i.e.

$$[\partial, x] = \partial x - x\partial = 1.$$

En particulier, $A_1(K)$ est isomorphe au quotient de l'algèbre à deux générateurs, X et Y, par l'idéal engendré par l'élément : $YX - XY - 1$.

Remarque 1. *Le* commutateur *de deux éléments a et b d'un anneau est défini par*

$$[a, b] = ab - ba.$$

1.2 Propriétés

Proposition 1. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\partial x^k = x^k \partial + k x^{k-1}.$$

Démonstration. Démontrons la proposition par récurrence. L'initialisation est donnée par la définition du commutateur. Pour l'hérédité, supposons la proposition vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. On a :

$$\partial x^{k+1} = (\partial x^k) x$$

par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &= (x^k \partial + k x^{k-1}) x \\ &= x^k (\partial x) + k x^k \end{aligned}$$

par la définition du commutateur de ∂ et x :

$$\begin{aligned} &= x^k (x\partial + 1) + k x^k \\ &= x^{k+1} \partial + (k+1) x^k \end{aligned}$$

D'où l'hérédité, ce qui conclut. □

Remarque 2. *De la même manière, on obtient Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$,

$$x \partial^k = \partial^k x - k \partial^{k-1}$$

Proposition 2. $A_n(K)$ *est une algèbre simple, c'est à dire que les seuls idéaux bilatères de* $A_n(K)$ *sont* $\{0\}$ *et* $A_n(K)$.

Démonstration. Considérons le cas $n = 1$. Soit $I \subset A_1$ un idéal bilatère non nul et $0 \neq P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta \in I$. Notons $m = \max(\alpha, \exists \beta \text{ tel que } a_{\alpha,\beta} \neq 0)$ le plus grand degré en x. On a $[\partial, P] \in I$ par propriété des idéaux et :

$$\begin{aligned} [\partial, P] &= \partial P - P \partial \\ &= \partial (\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta) - (\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta) \partial \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \partial x^\alpha \partial^\beta - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^{\beta+1} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \partial x^\alpha \partial^\beta - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} (x^\alpha \partial) \partial^\beta \end{aligned}$$

par la proposition précédente :

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} (x^\alpha \partial + \alpha x^{\alpha-1}) \partial^\beta - \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} (x^\alpha \partial) \partial^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \alpha x^{\alpha-1} \partial^\beta \end{aligned}$$

On obtient alors que le plus grand degré de x dans $[\partial, P]$ est $m-1$. En appliquant $[\partial, -]$ m fois à P on obtient un élément non nul de I ne dépendant pas de x. En faisant le même procédé avec $[-, x]$ (en répétant le procédé avec le résultat de la remarque précédente), on obtient une constante $c \in I$ d'où $cc^{-1} = 1 \in I$ et donc $I = A_1(K)$, ce qui conclut la démonstration.
Dans le cas général, on fait le même processus avec tous les $[-, x_i]$ et les $[\partial_j, -]$, $\forall i, j \in [\![1 ~;~ n]\!]$. On conclut de la même manière. □

1.3 Modules sur l'algèbre de Weyl

Définition 1. *Soit A un anneau (unitaire). Un A-*module à gauche *est un triplet $(M, +, \cdot)$ où M est un ensemble , $+$ est une loi de composition interne qui fait de M un groupe abélien et $\cdot$ est une loi externe de $A \times M$ dans M vérifiant, pour tous $a, b \in A$, pour tous $x, y \in M$:*
- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$.

Définition 2. *Un A-module M est* de type fini *s'il est engendré sur A par un nombre finie d'éléments. On a alors*

$$M = \sum_{i=0}^{n} A x_i$$

Exemple 1. *L'interprétation la plus fréquente des algèbres de Weyl $A_n(\mathbb{C})$ est celle d'algèbres d'opérateurs différentiels linéaires agissant sur les fonctions continues f du n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. Nous allons les faire agir sur une algèbre de suites de n indices à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit*

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$$

l'algèbre des suites $(u_{(k_1,...,k_n)})_{(k_1,...,k_n) \in \mathbb{Z}^n}$. Pour chaque i, définissons les actions de x_i et de ∂_i sur une suite $u \in \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ par :

$$(x_i \cdot u)_{(k_1,...,k_n)} = u_{(k_1,...,k_i-1,...,k_n)},$$

$$(\partial_i \cdot u)_{(k_1,...,k_n)} = (k_i + 1) u_{(k_1,...,k_i+1,...k_n)}.$$

Cette action est compatible avec le produit de $A_n(\mathbb{C})$ car

$$\partial_i \cdot (x_i \cdot u) = x_i \cdot (\partial_i \cdot u) + u,$$

ce qui fait de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ un $A_n(\mathbb{C})$-module.
On a en outre

$$[\partial_i \cdot (uv)]_{(k_1,...,k_n)} = (k_i+1) u_{(k_1,...,k_i+1,...,k_n)} v_{(k_1,...,k_i,...,k_n)} + (k_i+1) u_{(k_1,...,k_i,...,k_n)} v_{(k_1,...,k_i+1,...,k_n)},$$

d'où

$$\partial_i \cdot (uv) = (\partial_i \cdot u) v + u (\partial_i \cdot v).$$

Chaque ∂_i agit donc comme une dérivation de $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$. Cette action, d'une algèbre d'opérateurs différentiels *sur un module de* suites*, est utilisée notamment pour définir la notion d'holonomie sur les suites.*

Définition 3. La longueur *d'un module M sur un anneau est le plus grand entier n tel qu'il existe une suite*

$$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq ... \subsetneq M_n$$

strictement croissante de sous-modules de M. Si un tel maximum existe, M est de longueur finie, sinon on dit que sa longueur est infinie.

Définition 4. *Soit M un A-module. On dit que M est* simple *si $M \neq \{0\}$ et que les seuls sous-modules de M sont $\{0\}$ et M.*

Théorème 1. *Soit A un anneau simple ($A \neq \{0\}$, $\{0\}$ et A sont les seuls idéaux bilatères) de longueur infinie. Alors, tout A-module à gauche de longueur finie est cyclique, c'est à dire engendré par un seul élément.*

Démonstration. Soit M un A-module de longueur finie s. Raisonnons par récurrence sur s. Si $s = 1$, alors M est simple et $M = Ax$ pour tout élément x non nul de M. Supposons maintenant $s > 1$ et que tout A-module de longueur strictement inférieur à s est cyclique. Sous ces hypothèses, il nous faut construire $x \in M$ tel que $M = Ax$. Tout d'abord, choisissons $\beta \in M$ non nul tel que $A\beta$ soit simple, cela est possible car M est de longueur finie. Dès lors, la longueur du A-module $M/A\beta$ est $s - 1$, l'hypothèse de récurrence implique qu'il existe $\alpha \in M$ dont l'image dans $M/A\beta$ est un générateur cyclique. Par conséquent, $M = A\alpha + A\beta$. Considérons l'idéal $L(\alpha) = \{D \in A : D\alpha = 0\}$, le noyau de l'aplication

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow M \\ D &\longmapsto D\alpha \end{aligned}$$

et l'idéal $L(\beta) = \{D \in A : D\beta = 0\}$, le noyau de l'aplication

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow M \\ D &\longmapsto D\beta \end{aligned}$$

On a alors $A/L(\alpha) \cong M$ et puisque A est de longueur infinie et M est de longueur finie, $L(\alpha) \neq \{0\}$. Comme A est un anneau simple, l'idéal bilatère engendré par $L(\alpha)$ n'est pas contenu dans $L(\beta)$ et par conséquent il existe $r \in A$ tel que $L(\alpha)r$ ne soit pas contenu dans $L(\beta)$. Nous prétendons maintenant que si $x = \alpha + r\beta$, alors $M = Ax$. Pour le montrer, on remarquera que $L(\beta)$ est un idéal à gauche maximal dans A car $A\beta \cong A/L(\beta)$ est un A-module simple (car $A\beta$ est irréductible). Cela nous donne que $L(\beta) + L(\alpha)r = A$ et on peut écrire $1 = E + Dr$ où $E \in L(\beta)$ et $D \in L(\alpha)$. On a donc $\beta = (E + Dr)\beta = Dr\beta$ et on a aussi $Dx = D\alpha + Dr\beta = Dr\beta$. Cela prouve que $\beta \in Ax$ et par conséquent $\alpha = x - r\beta$ appartient également à Ax. Comme $M = A\alpha + A\beta$, on a $M = Ax$, et M est cyclique. □

Corollaire 1. *Tout $A_n(K)$-module à gauche de longueur finie est cyclique.*

2 Graduations et filtrations d'algèbres et de modules

Considérons tout de suite deux exemples, le premier commutatif, le second non-commutatif, pour motiver l'introduction des définitions qui vont suivre. Soit $K[x]$ une K-algèbre de polynômes commutatifs en plusieurs indéterminées $x = x_1, ..., x_n$. A chaque polynôme de cette algèbre est associé son *degré total* en x. Notons G_k l'ensemble des polynômes *homogènes* de degré k. La somme (directe) des G_k est donc l'algèbre toute entière. Par ailleurs, le caractère homogène de polynômes est stable par produit : le produit de deux polynômes homogènes de degrés respectifs k et l est un polynôme homogène de degré $k+l$. Formellement,

$$G_k G_l \subset G_{k+l}$$

Si l'on considère maintenant l'algèbre de Weyl $A_n(K)$, on ne retrouve plus d'aussi bonnes propriétés de produit par rapport au degré total en x et ∂. Dans ce cas, notons B_k l'ensemble des polynômes en x et ∂ de degré total *au plus* n. On a cette fois

$$B_k B_l \subset B_{k+l},$$

mais par exemple le produit des polynômes homogènes ∂ et x (pris dans cet ordre) n'est pas homogène de degré 2.
Les définitions qui suivent généralisent la situation ci-dessus.

2.1 Filtrations

Définition 5. *Une* filtration *sur une algèbre R est une suite croissante de sous-espaces vectoriels*

$$\{0\} = S_{-1} \subset S_0 \subset S_1 \subset ... \subset R \text{ avec :}$$

$$\bigcup_j S_j = R \text{ et } S_i.S_j \subset S_{i+j} \text{ , pour tous } i, j.$$

S_0 est ainsi une sous-algèbre de R.

Par exemple, les ensembles F_k de polynômes de degré au plus k de $A_n(K)$ forment une filtration sur $A_n(K)$, que nous allons étudier plus en détail dans la suite. Nous considérerons en effet principalement les deux filtrations suivantes sur $A_n(K)$:

• $S_j = B_j = \{\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta \mid |\alpha| + |\beta| \leq j\}$

Cette filtration est appelée *filtration de Bernstein.* Elle possède la propriété intéressante que les B_j sont de dimension finie. On a de plus $B_i.B_j = B_{i+j}$

• $S_j = F_j = \{\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta \mid |\beta| \leq j\}$

C'est le sous-espace des opérateurs d'ordre $\leq j$. On a encore $F_i.F_j = F_{i+j}$. Cette filtration peut-être généralisée aux algèbres d'opérateurs différentiels sur des variétés.

Dans la suite, nous continuerons à désigner par $B = (B_j)$ et $F = (F_j)$ ces deux filtrations.

Définition 6. *Si P est dans $A_n(K)$, son* ordre *relativement à la filtration F est le plus petit p tel que $P \in F_p$. Son* symbole $\sigma(P)$ *est alors la classe de P dans F_p/F_{p-1}. C'est un polynôme homogène de degré p en ζ, donc de la forme $\sum\limits_{|\beta|=p} a_\beta(x)\zeta^\beta$, avec ζ la classe de ∂ dans F_p/F_{p-1}.*

La notion de filtration se définit de manière similaire dans le cas de A-modules sur une algèbre A filtrée. Nous la définissons pour des $A_n(K)$-modules à gauche, $A_n(K)$ étant munie d'une filtration (S_j) parmi les deux mentionnées précédemment.

Définition 7. *Soit M un $A_n(K)$-module. Une* filtration *sur M est une suite croissante de K-sous-espaces vectoriels de M*

$$\{0\} = \Gamma_{-1} \subset \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset ... \subset M \text{ avec :}$$

$$\bigcup_j \Gamma_j = M,\ S_i.\Gamma_j \subset \Gamma_{i+j} \text{ et les } S_0\text{-modules } \Gamma_j \text{ sont de type fini.}$$

2.2 Algèbres graduées

Définition 8. *Soit A une algèbre sur un corps K. A est dite* graduée *lorsqu'il existe $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-espaces vectoriels de A (appelée* graduation*) telle que :*

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$$

avec :

$$A_i.A_j \subset A_{i+j} \text{ pour tous } i,\ j.$$

Les éléments de A_i sont appelés *éléments homogènes de degré i.*

Par exemple, les ensembles $G_k \subset K[x]$ de polynômes homogènes de degré k forment une graduation de $K[x]$.
Une fois qu'une algèbre a été munie d'une filtration, on lui associe une algèbre munie d'une graduation de la manière qui suit.

Définition 9. *Soit A une K-algèbre munie d'une filtration (S_j).* L'algèbre graduée *associée à A est la somme directe*

$$gr^S A = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} S_j/S_{j-1},$$

munie du produit induit par le produit de A.

Il reste à prouver que le produit est bien défini, auquel cas on aura que (S_j/S_{j-1}) est une graduation de $gr^S A$.

Démonstration. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, considérons

$$\alpha \in S_i/S_{i-1} \text{ et } \beta \in S_j/S_{j-1},$$

ainsi que

$$(a,a') \in \alpha^2 \text{ et } (b,b') \in \beta^2.$$

Alors,
$$ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in S_{i+j-1}.$$
En effet, $b - b' \in S_{j-1}$ et $a - a' \in S_{i-1}$ et la propriété de filtration permet de conclure. Le produit $\alpha\beta$ est donc bien défini comme l'image de ab dans l'espace vectoriel quotient S_{i+j}/S_{i+j-1}. Ce produit se généralise à toute paire d'éléments de $gr^S A$ par distribution du produit sur la somme. $\square$

Soit (S_j) l'une des deux filtrations associées à l'algèbre de Weyl. Nous disposons d'une algèbre graduée définie par :

$$gr^S A_n = \bigoplus_{j=0}^{\infty} S_j/S_{j-1},\ [a].[b] = [ab] \text{ pour [a], [b] homogènes}$$

Proposition 3. *L'algèbre graduée $gr^S A_n(K)$ est égale à l'algèbre des polynômes commutatifs $K[x_1, ..., x_n, \zeta_1, ..., \zeta_n]$ (où ζ_i est la classe de ∂_i dans le quotient S_1/S_0).*

Démonstration. Les propriétés de la filtration font de $gr^S A_n(K)$ une algèbre. L'égalite $S_p.S_q = S_{p+q}$ montre qu'elle est engendrée par les ζ_i. La commutativité vient du fait que la classe du commutateur $[\zeta_i, x_i]$ est nulle dans S_1/S_0, puisque ce commutateur (égal à 1) est dans S_0. $\square$

On définit encore une fois la notion de graduation dans le cas de A-modules sur une algèbre graduée. Nous le faisons ici dans le cas de $A_n(K)$-modules à gauche.

Lorsque M est un $A_n(K)$-module, on dispose d'un $gr^\Gamma A_n$-module gradué :

$$gr^\Gamma M = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Gamma_j/\Gamma_{j-1}$$

La structure de module étant définie par $[a].[u] = [au]$ pour $[a] \in gr^S A_n$, $[u] \in gr^\Gamma M$ homogènes.

Reste à vérifier que l'action de $gr^S A_n(K)$ sur $gr^\Gamma M$ est bien définie.

Démonstration. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, considérons $\alpha \in F_i/F_{i-1}$ et $\beta \in \Gamma_j/\Gamma_{j-1}$, ainsi que $(a, a') \in \alpha^2$ et $(m, m' \in \beta^2$. Alors am, am', $a'm$ et $a'm'$ sont éléments de Γ_{i+j}, mais
$$am - a'm' = a(m - m') + (a - a')m' \in \Gamma_{i+j-1}.$$
Le produit $\alpha\beta$ est donc bien défini comme l'image de am dans l'espace vectoriel quotient $\Gamma_{i+j}/\Gamma_{i+j-1}$. Ce produit se généralise à toute paire d'éléments de $gr^\Gamma M$ par distribution du produit sur la somme. $\square$

3 Modules de type fini sur l'algèbre de Weyl

Nous nous intéressons dans la suite aux systèmes d'équations aux dérivées partielles et à leurs solutions. D'un point de vue algébrique, cela revient à considérer des modules (à gauche) sur l'algèbre de Weyl. Expliquons pourquoi. Remarquons d'abord que l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$, sur un ouvert de

$\mathbb{R}^n$, ou l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$, sont des $A_n(\mathbb{R})$-modules à gauche.
Supposons maintenant donnée une famille d'opérateurs aux dérivées partielles $P_1, ..., P_r \in A_n(\mathbb{R})$. Si une distribution u sur $\mathbb{R}^n$ est solution du système correspondant, c'est-à-dire si u vérifie

$$P_1(x, \partial_x)(u) = ... = P_r(x, \partial_x)(u) = 0,$$

alors u vérifie aussi $Q(x, \partial_x)(u) = 0$ pour tout opérateur aux dérivées partielles $Q \in A_n(\mathbb{R})$ de la forme $Q = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i$, *i.e.* pour tout opérateur Q contenu dans l'idéal à gauche $(P_1, ..., P_r)$ dans $A_n(\mathbb{R})$. Le quotient $M = A_n(\mathbb{R})/(P_1, ..., P_r)$ est un *module à gauche* sur l'algèbre de Weyl. La distribution u définit alors un *homomorphisme* de $A_n(\mathbb{R})$-modules à gauche

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ [R] &\longmapsto R(u). \end{aligned}$$

Cette formule est bien définie, puisque si l'on change le représentant R de $[R] \in M$, *i.e.* si on remplace R par $R + Q$ avec $Q \in (P_1, ..., P_r)$, alors $R(u) = (R + Q)(u)$.
En conclusion : *à tout système d'équations aux dérivées partielles correspond un $A_n(\mathbb{R})$-module à gauche ; une solution distribution de ce système est un homomorphisme du module dans le module des distributions.* L'étude des $A_n(\mathbb{R})$-modules à gauche correspond donc à l'étude des propriétés algébriques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Ces propriétés algébriques ont des conséquences sur les propriétés des solutions. Mentionnons ces grandes familles de A_1-modules :

1. Les équations différentielles (modules cycliques). Si $P \in A_1$, étudier le module A_1/P revient à étudier l'équation différentielle "$P(y) = 0$". On va donner quelques exemples de A_1-modules M qui sont intéressants. On dispose déjà du A_1-module A_1 lui-même. Plus intéressant, on peut considérer le A_1-module $R := K[x]$ muni de l'action $\partial \cdot f = f'$. De manière plus exotique, on peut considérer le K-espace vectoriel δ de base $\{\theta_i\}$ avec l'action $x \cdot \theta_i = 0$ et $\partial \cdot \theta_i = \theta_{i+1}$. Voici quelques grandes familles de A_1-modules :
   (a) $P = 0$ mais alors $M \simeq A$,
   (b) $P = \partial$ mais alors $M \simeq R$,
   (c) $P = x$ mais alors $M \simeq \delta$,
   (d) $P = \partial - 1$. C'est l'équation "$f') - f = 0$". A_1/P est alors le *module de Dwork*, dont la solution est l'exponentielle),
   (e) $P = x\partial - \alpha$ (A_1/P est alors le *module de Kummer*, dont la solution est la puissance),
   (f) $P = x^2\partial^2 + x\partial + (x^2 - n^2)$ (A_1/P est alors le *module de Bessel*, dont la solution est la *fonction de Bessel*),
   (g) $P = x(1-x)\partial^2 + (1-2x)\partial - \frac{1}{4}$ (A_1/P est alors le *module de Legendre*, dont la solution est la fonction hypergéométrique).

2. Les systèmes différentiels (modules lisses). Si $F := [f_{i,j}] \in M_r(K[x])$ est une matrice quelconque, on peut considérer le $K[x]$-module libre M de base $\theta_1, ..., \theta_r$ sur $K[x]$ avec l'action $\partial \cdot \theta_i = \sum f_{i,j}\theta_j$ et $\partial \cdot f = f'$ si $f \in K[x]$. Cela revient à étudier le système différentiel "$\partial(y_i) = \sum f_{i,j} y_j$". Par exemple, on peut prendre

   (a) $F = 0$ (et $r = 1$) mais alors $M \simeq R$ de nouveau.

   Démonstration. Le $K[x]$-module M est par hypothèse engendré par un élément $\theta \in M$. Si l'on définit la structure de $K[x]$-module de M par $(P, m) \longrightarrow P \cdot m$, on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} K[x] &\longrightarrow M \\ P &\longmapsto P \cdot \theta. \end{aligned}$$

   qui envoie 1 sur θ. L'action décrite en hypothèse fait naturellement de M un A_1-module, dont la structure est définie par

$$\begin{aligned} A_1 \times M &\longrightarrow M \\ (P, m) &\longmapsto P \cdot m, \end{aligned}$$

   la loi $\cdot$ étant déduite de la structure de $K[x]$-module de M et de l'action décrite en hypothèse. Comme θ engendre M sur $K[x]$ et $K[x] \subset A_1$, on dispose d'un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} h : A_1 &\longrightarrow M \\ P &\longmapsto P \cdot \theta \end{aligned}$$

   qui envoie 1 sur θ. On a de plus

$$\partial \cdot \theta = 0$$

   Le polynôme $P = \partial \in A_1$ est irréductible, donc le noyau de h est (un idéal de A_1) engendré par P. Par théorème d'isomorphisme, $M \simeq A_1/P$. $\square$

   (b) $F = 1$ (et $r = 1$) qui est isomorphe au module de Dwork.

   Démonstration. Par le même raisonnement que le cas précédent, on dispose d'un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} h : A_1 &\longrightarrow M \\ P &\longmapsto P \cdot \theta \end{aligned}$$

   qui envoie 1 sur θ. On a de plus

$$(\partial - 1) \cdot \theta = 0$$

   Le polynôme $P = \partial - 1 \in A_1$ est irréductible, donc le noyau de h est (un idéal de A_1) engendré par P. Par théorème d'isomorphisme, $M \simeq A_1/P$. $\square$

(c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ qui est isomorphe au module cyclique avec $P = \partial^2 + 1$.

Démonstration. M est un $K[x]$-module engendré par deux éléments θ_1, θ_2 avec l'action (on le lit sur la matrice F)

$$\partial \cdot \theta_1 = -\theta_2 \text{ et } \partial \cdot \theta_2 = \theta_1.$$

Ces relations montrent que la famille $(\theta_1, \partial(\theta_1))$ forme une base du $K[x]$-module M. M est naturellement un A_1-module (voir les raisonnements effectués précédemment), engendré d'après ce qui précède par θ_1. On a donc une application surjective h de A_1 vers M qui envoie 1 sur θ_1. On a aussi

$$\partial^2 \cdot \theta_1 = -\theta_1.$$

En posant

$$P = \partial^2 + 1 \in A_1,$$

le noyau de h est engendré par le polynôme irréductible P. Par théorème d'isomorphisme, $A_1/P \simeq M$. □

3. Les systèmes différentiels avec pôles (modules induits par des modules lisses). On se donne $g \in K[x]$ et on pose $R = K[x][1/g] \subset K(x)$ (aussi noté parfois $K[x]_g$. C'est l'anneau des fractions rationnelles à pôles le long de $g = 0$. Comme ci-dessus, si $F := [f_{ij}] \in M_n(R)$ est une matrice quelconque, on peut considérer le R-module libre M de base $\theta_1, ..., \theta_n$ sur M, avec l'action $\partial\theta_i = \sum f_{i,j}\theta_j$ et $\partial f = f'$ si $f \in R$. Cela correspond à un système différentiel avec pôles. Par exemple, on peut prendre

(a) $g = x$, $F = 0$ (et $r = 1$) mais alors M est isomorphe au module de Kummer avec $\alpha = -1$.

Démonstration. Le $K[x]$-module M est par hypothèse engendré par un élément $\theta \in M$. Si l'on définit la structure de $K\left[x, \frac{1}{x}\right]$-module de M par $(P, m) \longrightarrow P \cdot m$, on dispose de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} K\left[x, \frac{1}{x}\right] &\longrightarrow M \\ P &\longmapsto P \cdot \theta. \end{aligned}$$

qui envoie 1 sur θ. On peut donc considérer le cas $M = K[x, \frac{1}{x}]$. L'action décrite en hypothèse fait naturellement de M un A_1-module, engendré par $\frac{1}{x}$ (l'action de ∂ sur $\frac{1}{x}$ donne les puissances négatives). Nous disposons donc d'un morphisme surjectif

$$\begin{aligned} h : A_1 &\longrightarrow M \\ P &\longmapsto P \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

On a de plus

$$(x\partial + 1) \cdot \frac{1}{x} = x(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x} = 0.$$

Le polynôme $P = x\partial + 1 \in A_1$ est irréductible, donc le noyau de h est (un idéal de A_1) engendré par P. Par théorème d'isomorphisme, $M \simeq A_1/P$. □

(b) $g = x(x-1)$, $F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2(x-1)} & \frac{-1}{2(x-1)} \\ \frac{1}{2x(x-1)} & \frac{1}{2(x-1)} \end{bmatrix}$ mais alors M est isomorphe au module de Legendre.

Démonstration. En effet, on lit sur la matrice F :

$$\partial(\theta_1) = -\frac{1}{2(x-1)}\theta_1 + \frac{1}{2x(x-1)}\theta_2 \text{ et } \partial(\theta_2) = \frac{1}{2}\theta_1 + x\partial(\theta_1).$$

Cela nous donne

$$\frac{\theta_2}{2} = x(1-x)\partial(\theta_1) + \frac{x}{2}\theta_1.$$

En appliquant ∂ des deux côtés, on a

$$\frac{1}{4}\theta_1 + \frac{x}{2}\partial(\theta_1) = \left[x(x-1)\partial^2(\theta_1) + (2x-1)\partial(\theta_1)\right] + \left[\frac{x}{2}\partial(\theta_1) + \frac{1}{2}\theta_1\right].$$

Ces relations montrent que la famille $(\theta_1, \partial(\theta_1))$ forme une base de M. M est naturellement un A_1-module, engendré d'après ce qui précède par θ_1. On a donc une application surjective g de A_1 vers M qui envoie 1 sur θ_1. La première relation nous donne l'équation suivante satisfaite par θ_1, appelée *équation de Picard-Fuchs* :

$$x(1-x)\partial^2(\theta_1) + (1-2x)\partial(\theta_1) - \frac{1}{4}\theta_1 = 0.$$

En posant

$$P = x(1-x)\partial^2 + (1-2x)\partial - \frac{1}{4},$$

le noyau de g est engendré par P. Par théorème d'isomorphisme, $A_1/P \simeq M$. □

3.1 Bonne filtration

On va maintenant s'intéresser aux modules de type fini sur notre algèbre noethérienne $A_n(K)$. Soit donc M un $A_n(K)$-module à gauche. Nous allons introduire la notion de *symbole* d'un élément de M, à l'aide de la notion de *bonne filtration* relativement à la filtration F introduite précédemment (définition analogue pour la filtration B).

Définition 10. *Une* bonne filtration *sur M relativement à F est une filtration croissante $F_\bullet M = (F_k M)_{k\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :*

— *il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$ et tout $l \geq 0$*

$$F_k F_l = F_{k+l}$$

— *Pour tout k, $F_k M$ est de type fini sur $F_0 A_n(K)$.*

C'est équivalent à :

— *$gr^F M$ est de type fini sur l'algèbre des polynômes $gr^F A_n(K)$.*

On décide ensuite que les éléments d'ordre $\leq k$ sont les éléments de F_kM (La filtration F sur $A_n(K)$ étant celle que l'on a introduite précédemment). Si M est engendré par $m_1, ..., m_r$, on construit une bonne filtration sur M relativement à F en posant

$$F_kM = \sum_{i=1}^{r} F_kA_n(K).m_i$$

Les générateurs sont alors d'ordre 0 et on peut modifier cette définition pour leur donner un ordre arbitraire l_i dans $\mathbb{N}$. Il existe ainsi un grand nombre de bonnes filtrations qu'il paraît important de comparer.

Proposition 4. *Deux bonnes filtrations sont comparables : étant données deux bonnes filtrations F et $F^{'}$ sur M, il existe un entier k_0 tel que pour tout k on ait :*

$$F_kM \subset F^{'}_{k_0+k}M \text{ et } F^{'}_kM \subset F_{k_0+k}M.$$

Démonstration. Soit Cette propriété s'obtient en prenant un nombre fini de générateurs de $F_{k_1}M$ et de $F^{'}_{k_2}M$ puis en exprimant les uns en fonction des autres (prendre k_1 et k_2 tels qu'il y ait égalité dans le point 2 de la définition de bonne filtration). □

Remarque 3. *On peut donner une définition analogue pour les filtrations de type B. Le deuxième point dit alors que B_kM est de type fini sur $B_0A_n(K) = K$, autrement dit est un espace vectoriel de dimension finie.*

Proposition 5. *Le module à gauche M admet une bonne filtration si et seulement si il est de type fini sur $A_n(K)$. Supposons que ce soit le cas et soit $F_\bullet M$ une bonne filtration. Alors :*

1. *si M' est un sous-module à gauche de M, la filtration $F_\bullet M' := F_\bullet M \bigcap M'$ est une bonne filtration de M', en particulier M' est aussi de type fini ;*
2. *si M'' est un quotient de M, la filtration $F_\bullet M''$ image de celle de M par la projection $M \to M'$ est bonne ;*
3. *si on a une suite exacte courte*

$$0 \to M' \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} M'' \to 0$$

de modules à gauche, on en déduit une suite exacte pour ces filtrations :

$$0 \to gr^F M' \to gr^F M \to gr^F M'' \to 0.$$

Rappelons que *suite exacte courte* signifie que a est injectif, b est surjectif et $\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(a)$.

Démonstration. La suffisance est claire puisque si on se donne un nombre fini de générateurs $m_1, ..., m_r$ de M, on obtient une bonne filtration en prenant :

$$F_kM = \sum_{i=0}^{r} F_kA_n(K).m_i.$$

Réciproquement, si $F_\bullet M$ est une bonne filtration, un système de générateurs de $F_{k_0}M$ sur $F_0A_n(K)$ en est aussi un pour M sur $A_n(K)$. Le point 2) est immédiat et le point 1) est le *lemme d'Artin-Rees*, dont l'argument repose sur le fait que, sur un anneau noethérien, tout sous-module d'un module de type fini est encore de type fini. Le point 3) de la proposition est conséquence des deux premiers, en remarquant qu'il suffit de construire une suite exacte courte entre les composantes de rang k de chacun des gradués ci-dessus, en se servant de la suite exacte courte donnée initialement. □

Détaillons le *lemme d'Artin-Rees*.

Lemme 1. *Soient A un anneau commutatif noethérien, I un idéal de A, M un A-module de type fini, et N un sous-module de M.*
Alors il existe un entier k tel que

$$(I^n M) \cap N = I^{n-k}((I^k M) \cap N) \text{ pour tout } n \geq k.$$

Démonstration. Dans l'anneau de polynômes $A[x]$, considérons la sous-A-algèbre

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n x^n.$$

A étant noethérien, I est un idéal de type fini de A et B est une A-algèbre de type fini. C'est donc un anneau noethérien.
Notons

$$M_x = A[x] \otimes_A M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x^n M,$$

et définissons de même N_x. Ainsi, N_x est un sous-$A[x]$-module de M_x, en particulier un sous-B-module.
Définissons un autre sous-B-module de M_x :

$$M'_x = B \otimes_A M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x^n I^n M.$$

Comme M est un A-module de type fini, M'_x est un B-module de type fini, donc noethérien. Le sous-B-module $M'_x \cap N_x$ est donc engendré par un nombre fini de vecteurs. Soit k un entier majorant le degré en x de tous ces vecteurs. Alors,

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x^n((I^n M) \cap N) = M'_x \cap N_x = B\left(\bigoplus_{j=0}^{k} x^j((I^j M) \cap N)\right),$$

d'où, pour tout $n \geq k$,

$$I^n M \cap N = \sum_{j=0}^{k} I^{n-j}((I^j M) \cap N) = I^{n-k} \sum_{j=0}^{k} I^{k-j}((I^j M) \cap N) \subset I^{n-k}((I^k M) \cap N),$$

ce qui donne l'inclusion dans un sens. Celle dans l'autre sens est immédiate. □

Remarque 4. *On voit en particulier que tout sous-module d'un $A_n(K)$-module de type fini est encore de type fini.*

Démonstration. On sait par la proposition précédente que $gr^F M'$ est un sous-module du $K[x, \zeta]$-module $gr^F M$. Ce dernier étant de type fini (Remarque 1) et $K[x, \zeta]$ étant noethérien, on en déduit que $gr^F M'$ est un $K[x, \zeta]$-module de type fini et donc que la filtration $F_\bullet M'$ est bonne. □

3.2 Polynôme de Hilbert associé à une bonne filtration

Nous commençons par énoncer quelques résultats généraux sur les $K[x_1, ..., x_m]$-modules gradués (pour l'étude de $A_n(K), m = 2n$), qui vont nous permettre de montrer l'existence du polynôme de Hilbert pour $gr^{\Gamma}M$, module gradué associé à une bonne filtration $\Gamma_{\bullet}M$ sur un $A_n(K)$-module de type fini M. Soit $N = \oplus N^{(k)}$ un module gradué sur $K[x_1, ..., x_m]$. Supposons que N est engendré par un nombre fini d'éléments. Il est donc aussi engendré par les composantes homogènes de ces éléments. Soient $m_1, ..., m_r$ des éléments homogènes de degrés respectifs $d_1, ..., d_r$. Si $m \in N$ est homogène de degré k, on peut écrire $m = \sum\limits_{i=1}^{r} \phi_i m_i,\ \phi_i \in K[x_1, ..., x_r]$ et on peut ne retenir dans les ϕ_i que leur composante homogène de degré $k - d_i$. En particulier chaque $N^{(k)}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 11. *Posons $N_k = \bigoplus\limits_{j=0}^{k} N^{(j)}$. C'est aussi un K-espace vectoriel de dimension finie. La série de Poincaré de N est la série formelle*

$$P(N,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dim(N_k)t^k.$$

Théorème 2. *(Hilbert, Serre). La série de Poincaré de N sur l'anneau des polynômes à m variables est la série formelle associée à une fraction rationnelle. De plus, $(1-t)^{m+1}P(N,t)$ est un polynôme à coefficients entiers.*

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur le nombre de variables m. Si $m = 0$ la suite (N_k) est stationnaire à partir d'un certain rang k_0 donc

$$P(N,t) = \sum_{j=0}^{k_0-1} \dim(N_k)t^k + \dim(N_{k_0})(1 + t + t^2 + ...) = p(t) + \frac{\dim(N_{k_0})t^{k_0}}{1-t},$$

où $p(t)$ est un polynôme de degré $\leq k_0 - 1$ à coefficients entiers. Pour $m \geq 1$, on considère la multiplication par x_m sur $N^{(k)}$, d'image contenue dans $N^{(k+1)}$. On note $K^{(k)}$ son noyau et $C^{(k+1)}$ son conoyau, quotient de $N^{(k+1)}$ par l'image $x_m(N^{(k)})$. On a alors

$$\dim(N^{(k+1)}) - \dim(N^{(k)}) = \dim(C^{(k+1)}) - \dim(K^{(k)}),$$

donc une égalité analogue

$$\dim(N_{(k+1)}) - \dim(N_{(k)}) = \dim(C_{(k+1)}) - \dim(K_{(k)}),$$

en convenant que $N_{-1} = 0$. En multipliant par t^{k+1} et en sommant sur k on obtient

$$(1-t)P(N,t) = \dim(N^{(0)}) - \dim(C^{(0)}) + P(C,t) - tP(K,t).$$

Les modules gradués $K = \bigoplus\limits_{k} K^{(k)}$ et $C = \bigoplus\limits_{k} C^{(k)}$ sont de type fini sur l'anneau $K[x_1, ..., x_m]$ car ce sont respectivement un sous-module et un quotient d'un tel module (cf. lemme d'Artin-Rees). Par ailleurs, la multiplication par x_m est nulle sur K et C, donc ce sont des $K[x_1, ..., x_{m-1}]$-modules de type fini, auxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure. □

La dimension de N est l'ordre du pôle moins 1 de la fraction $P(N,t)$ en $t=1$. Cette dimension est au plus égale au nombre de variables, d'après le théorème ci-dessus. On la note $\mathrm{d}(N)$. Ainsi $(1-t)^{d(N)+1}P(N,t)$ est un polynôme.

Corollaire 2. *La dimension de N_k est, pour tout k assez grand, un polynôme en k dont le terme de plus haut degré s'écrit $\frac{a}{\mathrm{d}(N)!}t^{d(N)}$, pour un certain $a \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. La dimension de $\dim(N_k)$ est le coefficient de t^k dans la série $P(N,t)$, qui s'écrit, en déveoppant $(1-t)^{-(\mathrm{d}(N)+1)}$ (cf. démonstration de la proposition 6)

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i t^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\mathrm{d}(N)+k}{\mathrm{d}(N)}t^k\right),$$

d'où, pour tout $k \geq p$, une expression

$$\dim(N_k) = \sum_{i=0}^{p} a_i \binom{\mathrm{d}(N)+k-i}{\mathrm{d}(N)}$$

qui est polynômiale en k, de degré $\mathrm{d}(N)$. Le coefficient de $k^{\mathrm{d}(N)}$ est $\frac{a_p}{\mathrm{d}(N)!}$. □

Proposition 6. *Soit M un $A_n(K)$-module de type fini. Soit $\Gamma_\bullet M$ une bonne filtration sur M. Il existe un unique polynôme d'une variable $\chi_{M,\Gamma}(t)$ tel que pour j assez grand on ait $\dim(\Gamma_j M) = \chi_{M,\Gamma}(j)$.*
Soit $d \geq 0$ le degré de ce polynôme. Alors :

$$\chi_{M,\Gamma}(t) = \frac{m}{d!}t^d + \textit{ monômes en } t \textit{ de degré inférieur,}$$

avec m entier naturel non nul et ne dépendant pas de la bonne filtration choisie sur M.

Définition 12. *Ce polynôme est le* polynôme de Hilbert *pour $gr^\Gamma M$. Son degré $d = \mathrm{d}(M)$ est la* dimension *de M, et le coefficient $m = \mathrm{mult}(M)$ est la* multiplicité *de M.*

Remarque 5. *Comme grA_n est un anneau polynomial à $2n$ variables, $d \leq 2n$.*

Démonstration. Généralisant la notion de bonne filtration, posons

$$\Gamma_k gr^\Gamma M = \bigoplus_{l \leq k} gr_l^\Gamma M$$

C'est une bonne filtration du $K[x,\zeta]$-module gradué $gr^\Gamma M$ et l'on a de manière évidente

$$\dim(\Gamma_k M) = \dim(\Gamma_k gr^\Gamma M).$$

On peut donc appliquer les résultats précédents sur les algèbres graduées pour conclure que $\dim(\Gamma_k M)$ est un polynôme en k pour k assez grand, dont le terme dominant a la forme voulue.

Etant données deux bonnes filtrations Γ et Γ' de M, il existe un entier k_0 tel que pour tout l on ait

$$\Gamma_l M \subset \Gamma'_{k_0+l} M \text{ et } \chi_{M,\Gamma'}(l) \leq \chi_{M,\Gamma}(k_0+l)$$

donc, pour tout l assez grand, on a

$$\chi_{M,\Gamma}(l) \leq \chi_{M,\Gamma'}(k_0 + l) \text{ et } \chi_{M,\Gamma'}(l) \leq \chi_{M,\Gamma}(k_0 + l)$$

ce qui donne immédiatement l'indépendance de terme de plus haut degré du polynôme $\chi_{M,\Gamma}$ vis-à-vis de la bonne filtration. □

Proposition 7. *On considère la filtration par degrés B (filtration de Bernstein) :*

1. *Si* $M = A_n(K)$ *alors* $\mathrm{d}(M) = 2n$ *et* $\mathrm{mult}(M) = 1$.
2. *Si* $M = K[x_1, ..., x_n] \cong A_n(K)/\sum_{j=1}^{n} A_n(K)\partial_j$*, alors* $\mathrm{d}(M) = n$ *et* $\mathrm{mult}(M) = 1$.
3. *Si* $M = K[\partial_1, ..., \partial_n] \cong A_n(K)/\sum_{j=1}^{n} A_n(K)x_j$*, alors* $\mathrm{d}(M) = n$ *et* $\mathrm{mult}(M) = 1$.

Démonstration. Nous allons traiter le cas de $A_n(K)$. Tout revient au calcul de la dimension de sev des polynômes de degré $\leq k$ à $2n$ variables. Pour dénombrer les monômes de degré exactement k, il s'agit de touver le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation :

$$\alpha_1 + ... + \alpha_{2n} = k.$$

Il s'agit de répartir k objets dans $2n$ emplacements ; pour cela, on place $2n-1$ séparations parmi ces k objets alignés sur une droite. C'est donc le nombre de choix possibles pour placer ces séparations, soit $\binom{2n+k-1}{2n-1}$. Le nombre de monômes de degré $\leq k$, et donc $\dim \Gamma_k$, est alors

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{2n+l-1}{2n-1} = \binom{2n+k}{2n},$$

qui est un polynôme en k dont le terme de plus haut degré permet de conclure. □

Corollaire 3. *Soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de $A_n(K)$*-modules de type fini. On a alors*

$$\mathrm{d}(M) = \max(\mathrm{d}(M'), \mathrm{d}(M'')).$$

Si les trois dimensions sont égales, on a de plus

$$\mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M') + \mathrm{mult}(M'').$$

Démonstration. On choisit une bonne filtration $\Gamma_\bullet M$ et on considère les bonnes filtrations induites $\Gamma_\bullet M'$ et $\Gamma_\bullet M''$ (proposition 5 et corollaire 2). On sait alors (penser à la suite exacte courte $0 \to gr^\Gamma M' \to gr^\Gamma M \to gr^\Gamma M'' \to 0$) que, pour tout k :

$$0 \to \Gamma_k M' \to \Gamma_k M \to \Gamma_k M'' \to 0$$

Ce qui donne :

$$\dim(\Gamma_k M) = \dim(\Gamma_k M') + \dim(\Gamma_k M'')$$

et permet de conclure en identifiant le terme de plus haut degré des polynômes $\chi_{M,\Gamma}, \chi_{M',\Gamma}$ et $\chi_{M'',\Gamma}$ qui apparait alors. □

Fixons une bonne filtration $B_\bullet M$ avec $B_0 M \neq 0$.

Lemme 2. *L'application K-linéaire*

$$\begin{aligned} B_i A_n(K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(B_i M, B_{2i} M) \\ P &\longmapsto (m \longmapsto Pm) \end{aligned}$$

est injective.

Démonstration. Pour simplifier les calculs, nous traiterons le cas $n = 1$. Elle se fait par récurrence sur i : le cas $i = 0$ résulte de l'hypothèse faite sur $B_0 M$. Soit $i \geq 1$ et $0 \neq P \in B_i A_n(K)$, et supposons que pour tout $m \in B_i M$ on ait $Pm = 0$. On ne peut avoir par hypothèse de récurrence $P \in B_{i-1} A_n(K)$. Il apparait donc effectivement dans P un monôme contenant x ou ∂. Supposons que ce soit x. On a vu que $[P, \partial] \in B_{i-1} A_n(K)$ est non nul (on ne perd qu'un degré), et alors il existe $m \in B_{i-1} M$ tel que $[P, \partial] m \neq 0$. On aboutit à une contradiction, puisque $Pm = 0$, et $P(\partial m) = 0$, puisque $\partial m \in B_i M$ □

Le théorème suivant est dû à Bernstein, qui en a donné la première preuve.

Théorème 3. *(Bernstein) : Si $M \neq \{0\}$ est un $A_n(K)$-module de type fini, alors* $\mathrm{d}(M) \geq n$.

Démonstration. On se donne une bonne filtration $B_\bullet M$ avec $B_0 M \neq 0$. Considérons le polynôme de Hilbert $\chi_{M,B}$. Le lemme montre que pour tout i assez grand on a

$$\begin{aligned} \chi_{A_n(K),B}(i) = \dim(B_i A_n(K)) &\leq \dim(\mathrm{Hom}_K(B_i M, B_{2i} M)) \\ &\leq \dim(B_i M).\dim(B_{2i} M) \\ &\leq \chi_{M,B}(i)\chi_{M,B}(2i). \end{aligned}$$

Par suite (à l'aide de la proposition 6)

$$2n = \deg\chi_{A_n(K),B} \leq 2\deg\chi_{M,B} = 2\mathrm{d}(M)$$

□

La démonstration du théorème repose de manière cruciale sur deux propriétés des algèbres de Weyl sur un corps de carctéristique nulle :

— $a \in B_p$ et $b \in B_q$ implique que

$$[b, a] = ba - ab \in B_{p+q-2},$$

et non pas seulement que

$$[b, a] \in B_{p+q-1}.$$

— Pour $a \in B_p$ hors de $B_0 \simeq K$, il existe $b \in B_1$ tel que

$$[b, a] \in B_{p-1}.$$

Ces deux points sont en général faux dans d'autres algèbres. En particulier, le théorème est faux pour une algèbre de Weyl en caractéristique non nulle, comme le montre l'exemple du $A_1(\mathbb{F}_2)$-module quotient de $A_1(\mathbb{F}_2)$ par son idéal à gauche engendré par x_1^2 et ∂_1. Ici, c'est la seconde propriété qui est en défaut : $[\partial_1, x_1^2] = [x_1, x_1^2] = 0$ et il n'existe plus généralement de b tel que $[b, x_1^2]$ soit de degré 1. Le module quotient esxt isomorphe à $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 x_1$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$ et est de dimension 0 en tant que module, sans être nul.

3.3 Modules holonomes

La définition de Bernstein de l'holonomie peut maintenant être rappelée. Sa justification est que la classe des modules qu'elle définit est facilement manipulable algorithmiquement.

Définition 13. *Soit M un $A_n(K)$-module de type fini. On dit que M est holonome si $M = \{0\}$ ou si $M \neq \{0\}$ et $\mathrm{d}(M) = n$.*

Comme premier exemple de module holonome, mentionnons l'anneau des polynômes $K[x]$, qui est un module sur l'algèbre de Weyl $A_n(K)$.

Proposition 8. *Les sous-modules et les quotients de modules holonomes sont holonomes.*

Démonstration. Considérons une suite exacte

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

avec M holonome. Si aucun des modules est nul, alors on a les inégalités suivantes $\mathrm{d}(M), \mathrm{d}(M') \geq n$ et $n = \mathrm{d}(M) = \max(\mathrm{d}(M'), \mathrm{d}(M''))$ (Corollaire 3). Donc les trois dimensions sont égales à n. □

Remarque 6. *Inversement, si M' et M'' sont holonomes, alors M l'est aussi.*

Corollaire 4. *Les modules holonomes sont de longueur finie.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que toute suite strictement décroissante (pour l'inclusion) de sous-modules d'un module holonome M a une longueur bornée par un entier ne dépendant que du module M. Considérons une telle suite

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r \supsetneq \{0\}.$$

Puisque les sous-modules d'une telle suite ne sont pas nuls, et puisque leur dimension est constante égale à n (Proposition 6), leur multiplicité est une suite décroissante d'entiers > 0, donc elle est stationnaire à partir d'un entier j. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{j+1} \longrightarrow M_j \longrightarrow M_j/M_{j+1} \longrightarrow 0.$$

Tous les modules dans cette suite sont holonomes car chaque M_i est holonome et (d'après le Corollaire 3) on a que

$$\mathrm{mult}(M_j) = \mathrm{mult}(M_{j+1}) + \mathrm{mult}(M_j/M_{j+1}).$$

Par définition de j, on a $\mathrm{mult}(M_j/M_{j+1}) = 0$ ce qui signifie que $M_j/M_{j+1} = 0$, puisque la multiplicité est toujours > 0 si le module n'est pas nul. Ainsi $M_j = M_{j+1}$. Autrement dit la suite décroissante de modules est stationnaire et de longueur $\leq \mathrm{mult}(M)$. $\square$

Il n'est pas évident en général de déterminer si un module donné est de type fini. Le théorème suivant fournit pour cela un critère très efficace.

Théorème 4. *Soit M un $A_n(K)$-module. Si M admet une filtration $B_\bullet M$ satisfaisant pour tout k à $\dim B_k M \leq \frac{c_0}{n!}k^n + c_1(k+1)^{n-1}$, où c_0 et c_1 sont deux entiers naturels, alors M est holonome et* $\mathrm{mult}(M) \leq c_0$. *En particulier M est de type fini.*

Démonstration. Soit N un sous-module de type fini de M et $B_\bullet N$ une bonne filtration de N. Soit k_0 tel que pour tout $l \geq 0$ on ait $B_{k_0+l}N = B_l A_n(K).B_{k_0}N$. $B_{k_0}N$ est de type fini donc il existe k_0' tel que ses générateurs soient tous dans $B_{k_0+k_0'}M$ (filtration) et alors $B_{k_0}N \subset B_{k_0+k_0'}M$. Ainsi pour tout $k \geq k_0$ on a, par la propriété de bonne filtration de $B_\bullet M$, l'inclusion $B_k N \subset B_{k_0+k_0'}M$. Grâce à l'inégalité 3 on a $\mathrm{d}(N) \leq n$, et donc $\mathrm{d}(N) = n$ par l'inégalité de Bernstein. Autrement dit N est holonome. De plus on a aussi $\mathrm{mult}N \leq c_0$.
Considérons une suite croissante de sous-modules de type fini de M :

$$N_0 \subset N_1 \subset ... \subset M.$$

Ils sont tous holonomes et la suite des multiplicités est aussi croissante (corollaire 2). Puisqu'elle est majorée par c_0 elle stationne à partir d'un entier $j \in \mathbb{N}$. Considérons la suite exacte

$$0 \to N_j \to N_{j+1} \to N_{j+1}/N_j \to 0.$$

Tous ces modules sont holonomes et on a $\mathrm{mult}(N_{j+1}) = \mathrm{mult}(N_j) + \mathrm{mult}(N_{j+1}/N_j)$. Par définition de j on a $\mathrm{mult}(N_{j+1}/N_j) = 0$, et donc $N_{j+1}/N_j = 0$ puisque la multiplicité est toujours strictement positive si le module est non nul (c'est un coefficient dominant). En d'autres termes $N_{j+1} = N_j$. Toute suite croissante de sous-modules est donc stationnaire de multiplicité $\leq c_0$. Considérons alors la suite croissante (N_j) définie par :

— $N_0 = 0$,

— $N_{j+1} = \langle N_j, m_{j+1} \rangle$ où $m_{j+1} \in M - N_j$ si $N_j \neq M$,
$N_{j+1} = M$ sinon.

Cette suite est stationnaire ; $M = N_j$ pour un certain j. M est donc holonome, de multiplicité $\leq c_0$. $\square$

Références

[1] Armand Borel, *Algebraic D-Module.* Academic Press, 1987.

[2] Jan-Erik Björk, *Rings of differential operators.* North-Holland Publishing Company,1979.

[3] Hugues Auvray et Vincent Thouard, *Modules sur l'algèbre de Weyl et division des distributions.* https ://www.math.ens.fr/enseignement/telecharger_fichier.php ?fichier=586 ,2006.

[4] Claude Sabbah, *Aspects algébriques de la théorie des distributions.*

[5] Frédéric Chyszak, *Fonctions holonomes en calcul formel.* Ecole Polytechnique X, 1998. http ://www.math.polytechnique.fr/cmat/sabbah/sabbah.html

[6] Bernard Le Stum, *Rigid Cohomologie.* Cambridge Tracts in Mathematics, 2007.