3.7 Exercices (7 novembre 2023)

La calculette pourra être utilisée comme outil d'aide à la décision mais en aucun cas comme argument scientifique.

Exercice 3.1
1. Je suis un nombre à quatre chiffres. Mon chiffre des dizaines est le double de mon chiffre des milliers. Mon chiffre des centaines est le triple de celui de mes unités. La somme de mes chiffres vaut onze. Qui suis-je ?
2. Vérifier que la prochaine date qui s'écrit avec huit chiffres différents est le 17 06 2345. Quelle était la dernière ?

Exercice 3.2 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. 100001 par 101, 2. 656665 par 11, 3. 66227 par 13.

Exercice 3.3 Sachant que $12079233 = 75968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division euclidienne de 12079233 par 75968 puis par 159.

Exercice 3.4 Déterminer selon la parité de $n > 0$ le reste dans la division par n de la somme S_n des n premiers entiers naturels non nuls ?

Exercice 3.5
1. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors $2 \mid n(n+1)$.
2. Montrer de même que $3 \mid n(n+1)(n+2)$.
3. Montrer de même que $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Exercice 3.6 Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $40^n n! \mid (5n)!$.

Exercice 3.7
1. Déterminer les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n-3$ est divisible par $n-2$?
2. Même question avec $3n-7$ et $n-4$?

Exercice 3.8 Résoudre les equations suivantes dans $\mathbb{N}$:

1. $x^2 - y^2 = 1$, 2. $xy = x + y$,

3. $xy = 2x + 2y$, 4. $2xy = x + y$.

Exercice 3.9
1. Déterminer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ le reste dans la division euclidienne de 2^n par 5.
2. Même question avec 3^n et 7.
3. Même question avec 38^n et 7.

Exercice 3.10
1. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $4^n + 2^n + 1$ est il divisible par 7 ?
2. Même question avec $9^n + 3^n + 1$ et 13.
3. Même question avec $25^n + 5^n + 1$ et 31.

Exercice 3.11 Déterminer en fonction de la parité de l'entier naturel n le reste dans la division de $7^n + 1$ par 8.

Exercice 3.12 Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Exercice 3.13 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 2$. Montrer queque si $a \equiv b \mod n$, alors $a^n \equiv b^n \mod n^2$.

Exercice 3.14
1. Montrer que $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13.
2. Montrer que si n est un entier naturel, alors $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 3.15
1. Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de 1357^{2013} par 5 ?

Exercice 3.16
1. Montrer que si $n > 0$, alors $6^n \equiv 6 \mod 10$.
2. En déduire le chiffre des unités du nombre 123456^{789}.
3. Montrer que $56^6 \equiv 56 \mod 100$.
4. Quel est le chiffre des dizaines de 123456^{789}.

Exercice 3.17
1. Déterminer les trois derniers chiffres de 49^2 et de 401^5 en utilisant la formule du binôme.
2. En déduire les trois derniers chiffres de 7^{20} puis de 7^{1001}.

Exercice 3.18
1. Calculer le pgcd de 231868 et 8190. En déduire leur ppcm.
2. Même question avec 23145 et 17.
3. Même question avec 12345 et 678.
4. Même question avec $2^{445} + 7$ et 15.

Exercice 3.19 Déterminer deux entiers u et v tels que

1. $23u + 35v = 1$, 2. $27u + 25v = 1$.

Exercice 3.20
1. Déterminer le pgcd d de $a := 2873$ et $b := 1001$ ainsi que deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.
2. Peut-on trouver deux entiers u et v tels que $au + bv = 15$?

Exercice 3.21
1. Montrer que tout entier pair a vérifie $a^2 \equiv 0 \mod 4$.
2. Montrer que tout entier impair a vérifie $a^2 \equiv 1 \mod 8$.
3. Soient a, b, c trois entiers *impairs*.
   (a) Quel est le reste de la division de $a^2 + b^2 + c^2$ par 8 ? En déduire que ce n'est pas un carré d'un entier.
   (b) En développant $(a + b + c)^2$, montrer que $ab + bc + ac \equiv 3 \mod 4$. En déduire que ce n'est pas non plus le carré d'un entier.

Exercice 3.22
1. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors $6 \mid n(n+1)(n+2)$.
2. Montrer de même que $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Exercice 3.23
1. Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors a et $a + b$ sont aussi premiers entre eux.
2. Montrer que si a est premier avec b et c, alors a est premier avec bc
3. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors pour tous entiers naturels k et l, a^k et b^l sont aussi premiers entre eux.

Exercice 3.24 Peux-t-on mettre les nombres 1 à 30 dans les cases d'un tableau de 5 lignes et 6 colonnes de sorte qu'en additionnant les nombres de chaque colonne on trouve toujours la même somme ?

Exercice 3.25
1. Montrer que si n est un entier quelconque, alors $8n+7$ et $6n+5$ sont toujours premiers entre eux.
2. Même question avec $2n+3$ et n^2+3n+2.
3. Même question avec $5^{n+1}+6^{n+1}$ et 5^n+6^n.

Exercice 3.26
1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a+11b=1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a+11b=6$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6a+12b=5$.

Exercice 3.27 Résoudre

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad a \wedge b = 18 \text{ et } a \vee b = 360?$$

Exercice 3.28 On veut résoudre

$$a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \begin{cases} a+b=51 \\ a \vee b = 216. \end{cases} \tag{3.1}$$

1. Décomposer 51, 72 et 216 en produits de facteurs premiers.
2. Quel est le pgcd de 51 et 216 ?
3. Déterminer toutes les décompositions de 72 et 216 en produits d'entiers naturels premiers entre eux.
4. Montrer que si a et b sont solutions du système (3.1), alors leur pgcd divise celui de 51 et 216.
5. Conclure.

Exercice 3.29
1. Montrer que si $a, b \geq 2$ sont premiers entre eux, alors $\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$ est irrationnel.
2. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ sont tels que $ab, a+b \in \mathbb{Z}$, alors $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.30 Les nombres 111, 1111, 11111 (persévérer), 111111 sont ils premiers ?

Exercice 3.31 Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 46848, 2379, 1001 et 2873.

Exercice 3.32 Montrer que l'intervalle $[n!+2, n!+n]$ ne contient aucun nombre premier.

Exercice 3.33 Montrer que si $10 \leq n \leq 120$, alors n est premier si et seulement si $n \wedge 210 = 1$.

Exercice 3.34
1. Montrer que si p premier divise à la fois $a+b$ et ab, alors p divise nécessairement a et b.
2. En déduire que si a et b sont premiers entre eux, alors $a+b$ et ab sont aussi premiers entre eux.

Exercice 3.35 1. Montrer par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ *impair* que

$$x^q + 1 = (x+1)\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k x^k.$$

2. Montrer que, pour $m > 0$, si $2^m + 1$ est premier, alors $m = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.36 1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier et $a, n \geq 2$, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Montrer que $2^{11} - 1$ n'est pas premier (persévérer).

Exercice 3.37 1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b^n$ si et seulement si $n \mid v_p(a)$ pour tout nombre premier p.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$ est à la fois un carré et un cube, alors c'est une puissance sixième.
3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Montrer que si ab est un carré, alors a et b aussi.

Exercice 3.38 1. Montrer (par l'absurde) que si $n \equiv 3 \mod 4$, alors il existe un nombre premier p tel que $p \mid n$ et $p \equiv 3 \mod 4$.
2. Montrer que si $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers, alors $4p_1 \ldots p_r - 1 \equiv 3 \mod 4$.
3. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.39 On désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier naturel n.
1. Montrer que n est un carré si et seulement si $d(n)$ est impair.
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \{d \in \mathbb{N} \;/\; d \mid n \text{ et } d > \sqrt{n}\} &\longrightarrow \{d \in \mathbb{N} \;/\; d \mid n \text{ et } d < \sqrt{n}\}, \\ d &\longmapsto \frac{n}{d} \end{aligned}$$

est bijective.
3. En déduire que

$$\prod_{d \mid n} d = \sqrt{n}^{d(n)}$$