- 4a) : Lorsque $z \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = 0$ si et seulement si $z^3 = -2 + 2i$. On calcule
$$|z|^3 = |z^3| = |-2+2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$
si bien que $|z| = \sqrt{2}$. En écrivant
$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
et en rappelant que $\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ et $\sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$, on voit que
$$3\arg(z) \equiv \arg(z^3) \equiv \arg(-2+2i) \equiv \frac{3\pi}{4} \mod 2\pi$$
si bien que $\arg(z) \equiv \pi/4 \mod 2\pi/3$. Puisque $\pi/4 + 2\pi/3 = 11\pi/12$ et que $\pi/4 + 4\pi/3 = 19\pi/12$, on trouve les trois possiblités
$$\arg(z) \equiv \pi/4, 11\pi/12 \text{ ou } 19\pi/12 \mod 2\pi.$$

- 4c) (autre méthode[1]) : Si on appelle A, B, C les points du plan correspondants et qu'on désigne l'origine par O, alors par construction, les trois triangles AOB, BOC et COA sont isocèles en O, de coté $\sqrt{2}$, avec un angle de $2\pi/3$. Il suit que les cotés opposés AB, BC et CA sont tous égaux.

- 4d) Il s'agit de résoudre l'équation
$$r \in \mathbb{R}, \quad r^3 + 4(1-i)r^2 - 2(2+7i)r - 16 + 8i = 0,$$
ou, ce qui revient au même, le système
$$\begin{cases} r^3 + 4r^2 - 4r - 16 = 0 \\ -4r^2 - 14r + 8 = 0. \end{cases}$$
L'équation du second degré à pour solutions
$$\frac{7 + \sqrt{49+32}}{-4} = -4 \quad \text{et} \quad \frac{7 - \sqrt{49+32}}{-4} = \frac{1}{2}$$
On remplace dans la première équation pour trouver respectivement
$$-64 + 64 - 16 - 16 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{8} + 1 - 2 - 16 \neq 0.$$
On voir donc que $r = -4$.

[1] On calcule
$$\frac{\sqrt{2}e^{17i\pi/12} - \sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{11i\pi/12} - \sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{(e^{4i\pi/3} - 1)e^{i\pi/4}}{(e^{2i\pi/3} - 1)e^{i\pi/4}} = e^{2i\pi/3} + 1 = e^{i\pi/3},$$
ce qui indique que le triangle est équilatéral.

- 4e) : Puisque $r=-4$, on doit avoir $4v=-16+8i$ et donc $v=-4+2i$. On veut donc
$$g(z)=(z+4)(z^2-uz-4+2i).$$
En développant, on trouve $u=4i$.

- 4f) : On a bien sûr la solution $z=-4$. Pour trouver les deux autres, on résout $z^2-4iz-4+2i=0$. On calcule le discriminant $\Delta=-16-4(-4+2i)=-8i$. Ses racines $a+ib$ satisfont
$$\begin{cases} a^2+b^2=8 \\ a^2-b^2=0 \\ 2ab=-8. \end{cases}$$
Nécessairement $a^2=b^2=4$ et $ab>0$ et on trouve donc $2-2i$ et $-2+2i$. Il suit que
$$z=\frac{4i+2-2i}{2}=1+i \quad \text{ou} \quad z=\frac{4i-2+2i}{2}=-1+3i.$$

- 4h) (autre méthode[2]) : On calcule
$$\frac{-4-(-1+3i)}{(1+i)-(-1+3i)}=\frac{-3+3i}{2+2i}=-\frac{3}{2}i.$$
C'est un imaginaire pur, ce qui signifie que le triangle est rectangle.

- 5b) : Les points A,D,K sont alignés par définition. D'autre part $A\neq K$ car les droites (AD) et (BC) sont sécantes en K et les points A,B,C,D sont distincts.

- 5c) : On a
$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}-\mu\overrightarrow{KB}&=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DC}-\mu\overrightarrow{KB}=\mu\overrightarrow{KA}+\lambda\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{KB}\\ &=\lambda\overrightarrow{AB}-\mu(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA})=\lambda\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AB}=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$
Comme (BC) et (AB) ne sont pas parallèles, les deux membres de l'égalité sont nécessairement nuls. Puisque $A\neq B$, on doit avoir $\lambda-\mu=0$.

- 5d) Par symétrie : échanger A avec B et C avec D.

- 5e) On a
$$\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)=\frac{1}{2}\left(\lambda\,\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{KA}\right)=\lambda\,\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KA}\right)=\lambda\,\overrightarrow{KI}.$$

[2] On applique la réciproque du théorème de Pythagore : on a
$$\begin{cases} |(1+i)-(-1+3i)|^2 &= |2-2i|^2=8 \\ |-4-(-1+3i)|^2 &= |-3-3i|^2=18 \\ 1+i-(-4)|^2=|5+i|^2=26, \end{cases}$$
et $8+18=26$.

- 5f) : Les points I, J, K sont bien alignés. On conclut par symétrie : échanger C avec D.

- 6a) : Puisque $b = \alpha a$, on a

$$T(\omega) = \frac{\alpha + ib\omega}{1 + ib\omega} = \frac{\alpha(1 + ib\omega) + (1 - \alpha)ib\omega}{1 + ib\omega}$$

$$= \alpha + (1 - \alpha)\frac{1}{\frac{1}{bi\omega} + 1} = \alpha + (1 - \alpha)\frac{1}{1 - i\frac{1}{b\omega}}.$$

- 6b) : C'est tout simplement la demi-droite $\mathcal{D}$ des points d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y < 0$: en effet, l'application $\omega \mapsto y := -1/b\omega$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] - \infty, 0[$ (dont l'inverse est $y \mapsto \omega := -1/by$).

- 6c) : Dire que le point M d'affixe $z = x + iy$ est sur $\mathcal{C}_1$ signifie que son inverse

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

est sur $\mathcal{D}$, c'est à dire que

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{y}{x^2 + y^2} < 0.$$

On trouve donc $y = \sqrt{x - x^2}$ avec $x \in]0, 1[$: c'est le demi-cercle supérieur de centre $(1/2, 0)$ et de rayon $1/2$.

- 6d) : C'est le demi-cercle supérieur de centre $(\frac{1-\alpha}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1-\alpha}{2}$ (on fait une homothétie vectorielle).

- 6e) : C'est le demi-cercle supérieur de centre $(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}, 0) = (\frac{1+\alpha}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1-\alpha}{2}$ (on fait une translation horizontale).

- 6f) : On a

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}.$$

- 6g) : On aura

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \sin(\pi/6) = 1/2$$

si bien que $2(1 - \alpha) = 1 + \alpha$ et $\alpha = 1/3$.

- 6h) (autre méthode[3]) : Si on note N_1 et N_2 les points de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ correspondants, la configuration est analogue à celle de N' sur $\mathcal{C}$ (homothétie

[3] Le théorème de Pythagore nous fournit $ON' = \sqrt{(2/3)^2 - (1/3)^2} = \sqrt{3}/3$. On en déduit les coordonnées x' et y' de N' en résolvant

$$\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{y'}{\sqrt{3}/3} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{x'}{\sqrt{3}/3},$$

si bien que $x' = 1/2$ et $y' = \sqrt{3}/6$. On calcule alors successivement les coordonnées de N_2, vectorielle et translation horizontale) : la tangente à la courbe en ce point fait un angle de $\pi/6$ avec l'axe des x. D'autre part, la tangente à $\mathcal{C}_1$ en N_1 est, par définition, perpendiculaire au rayon. Si on note Ω le centre du demi-cercle $\mathcal{C}_1$, on voit donc que l'angle entre le rayon (ΩN_1) et l'axe des x est le complémentaire de $\pi/6$, c'est à dire $\pi/3$. Comme le triangle $O\Omega N_1$ est isocèle en ω, l'angle entre l'axe des x et (ON_1) est aussi de $\pi/3$ (et le triangle est en fait équilatéral). Le passage entre N et N_1 correspond à la transformation $z \mapsto 1/z$ qui change le signe de l'argument (et inverse le module). Cela signifie que (ON) fait un aussi un angle de $\pi/3$ avec l'axe des x mais de l'autre coté. Puisque $N \in \mathcal{D}$, son ordonnée y doit satisfaire

$$\sqrt{3} = \tan(\pi/3) = \frac{|y|}{1}.$$

Le point N a donc pour coordonnées $(1, -\sqrt{3})$.

- 6j) On a donc $1/b\omega = \sqrt{3}$ si bien que, comme $\omega = 1000$, $b = 1000\sqrt{3}/3$ (et $a = 1000\sqrt{3}$ puisque $\alpha = 1/3$) et donc

$$C = \frac{1000\sqrt{3}}{R_1}.$$

N_1 et N. On trouve d'abord $x_2 = 1/2 - 1/3 = 1/6$ et $y_2 = \sqrt{3}/6$ puis $x_1 = (1/6)/(2/3) = 1/4$ et $y_1 = (\sqrt{3}/6)/(2/3) = \sqrt{3}/4$. On a donc

$$x = \frac{1/4}{(1/4)^2 + (\sqrt{3}/4)^2} = 1 \text{ (comme prévu)} \quad \text{et} \quad y = -\frac{\sqrt{3}/4}{(1/4)^2 + (\sqrt{3}/4)^2} = -\sqrt{3}.$$

2) Soient A et B deux points du plan euclidien et G le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Calculer $2GA^2 + GB^2$ en fonction de AB^2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 = AB^2$.

3) On considère dans le plan euclidien un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R ainsi qu'un point P. Soit Δ une droite passant par P et coupant $\mathcal{C}$ en deux points A et B. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$. Montrer que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = PO^2 - OA^2$. En déduire que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ ne dépend que de P et de $\mathcal{C}$.