Licence 1 — Mathématiques | **Algèbre et géométrie 1**
Université Rennes 1 | 2020–2021

Corrigé du contrôle continu 2

Exercice 1

Linéariser $\sin^4(x)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{(2i)^4}(e^{ix}-e^{-ix})^4 \\
&= \frac{1}{16}((e^{ix})^4 - 4(e^{ix})^3e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 - 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4) \\
&= \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
&= \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) \\
&= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) \\
&= \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3).
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{\overline{z}-i} \end{array}$ *. L'application* f *est-elle injective ? surjective ?*

Notons que si $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, on a $\overline{z}-i \neq 0$ et donc $\frac{1}{\overline{z}-i}$ est bien défini et non nul. Ainsi f est bien définie et 0 n'a pas d'antécédent par f ; en particulier f n'est pas surjective.
Montrons que f est injective. Soit $z, z' \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tels que $f(z) = f(z')$ soit $\frac{1}{\overline{z}-i} = \frac{1}{\overline{z'}-i}$. En prenant les inverses, on obtient $\overline{z}-i = \overline{z'}-i$ d'où $\overline{z} = \overline{z'}$; en prenant les conjugués on obtient $z = z'$. Ceci montre bien que f est injective.

Exercice 3

Soit $f \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{\overline{z}-i} \end{array}$. *Déterminer et représenter l'ensemble des points du plan dont l'affixe* z *vérifie* $|f(z)| = \frac{1}{2}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. On a les équivalences suivantes

$$|f(z)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\overline{z}-i}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{|\overline{z}-i|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\overline{z}-i| = 2 \Leftrightarrow \left|\overline{z+i}\right| = 2 \Leftrightarrow |z+i| = 2$$

Notons A le point d'affixe $-i$. L'ensemble cherché est donc l'ensemble des points M du plan d'affixe $\neq -i$ et vérifiant $MA = 2$. C'est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

Exercice 4

Soit E, F *des ensembles et* $f \colon E \to F$ *une application.*

1. *On suppose qu'il existe une application* $g \colon F \to E$ *telle que* $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ *; montrer qu'alors* f *est injective.*
   Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$; montrons que $x = x'$. Comme $f(x) = f(x')$, on a $g(f(x)) = g(f(x')$ soit $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, on en déduit $\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E(x')$ soit $x = x'$, ce qui conclut.
2. **(facultatif et hors-barême)** *On suppose* E *non vide et* f *injective ; montrer qu'il existe une application* $g \colon F \to E$ *telle que* $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
   Soit $a \in E$ un élément quelconque de E (comme E est non vide, un tel élément existe). Soit $y \in F$. Si y n'a pas d'antécédent par f, on pose $g(y) = a$. Si y a un antécédent par f, comme f est injective, cet antécédent est unique ; on définit alors $g(y)$ comme étant l'unique antécédent de y par f.
   Montrons que l'application $g \colon F \to E$ ainsi construite vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est à dire $\forall x \in E, \quad g(f(x)) = x$.
   Soit $x \in E$. Posons $y = f(x)$. Par définition de y, x est un antécédent de y par f. Ainsi l'unique antécédent de y par f est x, et par définition de g on a $g(y) = x$. Ainsi $g(f(x)) = x$. Ceci conclut la démonstration.