NOM :	Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2022–2023

Contrôle continu 1
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.
Sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être soigneusement démontrée ; la rédaction est prise en compte dans l'évaluation.
On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1 5 points

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Exprimez sous forme d'une formule avec quantificateurs la propriété

« f est majorée »

puis écrivez la négation de la formule obtenue. *Ici aucune justification n'est demandée.*

3 « f est majorée » s'écrit
$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leqslant M.$

2 La négation de cette propriété s'écrit
$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) > M.$

Exercice 2 4 points

L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant n.$$

4 Cette assertion est vraie, car en prenant $n := -1$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0 \geqslant -1 = n$.
Donc $n = -1$ répond à la question.

Exercice 3 5 points

1. Complétez le tableau suivant :

1 (0,5 par ligne)

n	0	1	2	3	4
$n!$	1	1	2	6	24
n^2	0	1	4	9	16

2. Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $n! \geqslant n^2$.

4 Dém. directe : pour tout $n \geqslant 4$ entier on a $(n-1)\times\cdots\times 2 \geqslant (n-1)\times 2$ car $n \geqslant 4$
$\geqslant n$ car $n \geqslant 2$.
En multipliant par $n \geqslant 0$ on trouve $n! \geqslant n^2$.

ou

Dém par récurrence :

1 Initialisation : $4! = 24 \geqslant 16 = 4^2$

2 Hérédité : supposons que pour un $n \geqslant 4$ on a $n! \geqslant n^2$.
En multipliant par $n+1$, qui est $\geqslant 0$, on déduit $(n+1)! \geqslant n^2(n+1)$ (*).
Or pour $n \geqslant 4$ on a $n-1 \geqslant 3$ donc $n(n-1) \geqslant 12 \geqslant 1$
donc $n^2 \geqslant n+1$
donc $n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$.

4 Avec (*) ceci donne $(n+1)! \geqslant n^2(n+1) \geqslant (n+1)^2$ ce qui démontre la propriété au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 4$.

Exercice 4 6 points

Soient A et B des parties d'un ensemble E. Démontrez qu'on a :

$$A \subset B \iff A^c \cup B = E.$$

Dém "avec les parties"

3 $\boxed{\Rightarrow}$ si $A \subset B$ alors $B = B \cup A$ donc $A^c \cup B = A^c \cup B \cup A = E$

3 $\boxed{\Leftarrow}$ si $A^c \cup B = E$ alors $A \cap (A^c \cup B) = A \cap E = A$
donc $\emptyset \cup (A \cap B) = A$ donc $A \cap B = A$ donc $A \subset B$.

ou

Dém "avec les éléments"

3 $\boxed{\Rightarrow}$ si $A \subset B$, soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in B$ donc $x \in A^c \cup B$ et si $x \in A^c$, la même conclusion est vraie. Donc $E \subset A^c \cup B$. L'inclusion opposée est vraie puisque $A, B \subset E$. Ainsi $A^c \cup B = E$

3 $\boxed{\Leftarrow}$ si $A^c \cup B = E$, soit $x \in A$. Alors $x \notin A^c$; donc $x \in E = A^c \cup B$ implique que $x \in B$. Ceci démontre que $A \subset B$.