

NOM :

Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2021–2022

Contrôle continu 1
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.

TRÈS IMPORTANT : sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être soigneusement démontrée; la rédaction est prise en compte dans l'évaluation.

On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

1. Exprimer sous forme d'une formule avec quantificateurs la propriété « f est décroissante », puis écrire la négation de la formule obtenue. *Aucune justification n'est demandée*
2. Donner un exemple d'une fonction qui n'est pas décroissante.

Exercice 2

L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$\forall x \in \mathbf{Z} \quad \exists y \in \mathbf{Z} \quad x^3 - y = 2.$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, on pose $S_n = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \dots + n \cdot 5^n = \sum_{k=1}^n k \cdot 5^k$. Démontrer par récurrence la proposition suivante : pour tout $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$, on a $S_n = \frac{(4n-1) \cdot 5^{n+1} + 5}{16}$.

Exercice 4

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{4x^2}{2x^2+1}$. L'application f est-elle injective? surjective?